FÍSICA para PREPOLITÉCNICO

TEORÍA Y

PROBLEMAS RESUELTOS

CUARTA EDICIÓN

M. ALMEIDA
M. ARIAS
F. BARBA
P. CASTILLO
C. CÓRDOVA
F. CUSTODE
H. FLORES
K. MORENO
M. TASIGUANO
A. ULLOA
S. YASELGA
J. ZAMBRANO

PROFESORES DEL CURSO PROPEDÉUTICO DE LA
ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

PrepoFis
PUBLICACIONES

FEBRERO 2011

Foto de la portada

Levitación magnética. Un pequeño imán cilíndrico flota por encima de un superconductor. El vapor es nitrógeno líquido en ebullición que mantiene al superconductor en un estado de resistencia nula. Cuando el imán desciende hacia el superconductor, induce una corriente eléctrica, que a su vez crea un campo magnético opuesto al del imán. Como el superconductor no tiene resistencia eléctrica, la corriente inducida sigue fluyendo y mantiene el imán suspendido indefinidamente.

Foto de la contraportada

Sistemas tolomeico y copernicano. La física y la astronomía nacieron juntas. La física aristotélica consideraba a la Tierra como el centro de un universo de esferas concéntricas en rotación; este modelo no servía para los cálculos astronómicos. En el siglo II, Tolomeo propuso un modelo en el cual los planetas se movían alrededor del sol en órbitas llamadas epiciclos. El modelo de Tolomeo no describía con exactitud el movimiento planetario pero funcionaba bien matemáticamente, aunque de manera intrincada. En el siglo XVI, Copérnico desarrolló el modelo heliocéntrico del sistema solar que dio una explicación simple del movimiento de los planetas. Basado en él, Kepler encontró sus famosas leyes que describen con precisión el movimiento de los planetas. Sin embargo, el golpe decisivo al método intuitivo de hacer física, iniciado por Aristóteles, lo dio Galileo al desarrollar el sistema heliocéntrico e inaugurar el método de razonamiento científico: éste fue el verdadero inicio de la física como ciencia.

Publicado en Ecuador por **PUBLICACIONES PrepoFis**

Número de inscripción conferido por el
Registro Nacional de Derechos de Autor: 011679

ISBN 9978-40-440-6

PRESENTACIÓN

En la Cátedra de Física del Curso Propedéutico de la Escuela Politécnica Nacional se tiene como eje central el enseñar la física como una ciencia, poniendo énfasis en los fundamentos: en las ideas, los conceptos, las leyes y los principios físicos; en definitiva, en la teoría que es la esencia de la física y su arma más poderosa para conocer la realidad y resolver problemas tecnológicos.

Así, quedaron atrás veinte años de un programa antiguo que veía a la física, en la parte correspondiente a la teoría, como una colección de fórmulas y recetarios cuya única función era la de servir para "resolver problemas", por lo general matemáticamente complicados.

El presente libro, **FÍSICA PARA PREPOLITÉCNICO (Teoría y Problemas Resueltos)**, Cuarta Edición, es una versión mejorada de las tres anteriores. En él está incorporada la *Teoría*, que corresponde al actual programa de estudios, con la importancia y desarrollo debidos. Esta *Teoría* es puesta a prueba en los *Problemas Resueltos* incorporados, y en su complemento, las tres ediciones del **CUADERNO DE TRABAJO** que contiene *Preguntas y Problemas Propuestos* cuya solución exige al estudiante la aplicación de los conceptos, leyes y principios asimilados.

Los profesores de la Cátedra de Física del Curso Propedéutico, ingenieros y físicos, siguen un proceso riguroso y sistemático para la elaboración de preguntas y problemas para las pruebas y exámenes. Los *Problemas Resueltos* de **la FÍSICA PARA PREPOLITÉCNICO** y las *Preguntas y Problemas Propuestos* del **CUADERNO DE TRABAJO** han sido seleccionados de una base de datos de más de 1000 preguntas y 800 problemas.

El presente libro, **FÍSICA PARA PREPOLITÉCNICO,** y su complemento, el **CUADERNO DE TRABAJO** en sus tres ediciones**,** están destinados para su uso en la materia de física que se dicta en el curso propedéutico de la Escuela Politécnica Nacional. Recomendamos su uso para otros cursos similares en otras universidades y politécnicas, y como material de consulta para los profesores de física de la enseñanza media.

Los autores

Quito, febrero de 2011

ÍNDICE

CAPÍTULO 1

LA CIENCIA

CAPÍTULO 1

LA CIENCIA

1.1 INTRODUCCIÓN

Desde la antigüedad el ser humano tuvo curiosidad por conocer y entender lo que sucedía en su entorno natural, lo que le permitió, a su vez, descubrir una serie de conocimientos rudimentarios, si se quiere; pero que, contribuyeron a aliviar gran parte de sus tareas o actividades habituales. Esta curiosidad natural, a través del tiempo y con ayuda del pensamiento, se transformó en una actividad sistemática de la especie humana, con características bien definidas y a la cual se la conoce en la actualidad con el nombre de ciencia.

Se podría decir, entonces, que el conocimiento tiene su origen en la interacción del hombre con la realidad y que esta interacción se puede dar fundamentalmente de dos formas: empírica, a través de los sentidos, y racional, por medio del pensamiento.

1.2 CLASES DE CONOCIMIENTO

Existen básicamente dos tipos de conocimiento: el empírico y el científico.

El empírico, se caracteriza porque se da por medio de los sentidos y se limita a una simple constatación de hechos, de eventos que suceden.

El científico, en cambio, si bien también se vale de los sentidos, se caracteriza porque el reflejo de la realidad en el cerebro del hombre se da por medio de conceptos, que son abstracciones y generalizaciones de esa realidad.

1.3 DEFINICIÓN DE CIENCIA

Es muy difícil dar una definición de ciencia, sin embargo una que parece bastante completa es la de Kédrov: "es un sistema de conceptos acerca de los fenómenos del mundo exterior y de la actividad espiritual de los individuos, que permite conocer, prever y transformar la realidad en beneficio de la sociedad; es una forma de actividad humana, históricamente determinada, cuyo contenido y resultado es la reunión de hechos orientados en un determinado sentido, de hipótesis y teorías elaboradas y de leyes que constituyen su fundamento, así como de procedimientos y métodos de investigación".

El concepto de ciencia se aplica tanto al proceso de elaboración de los conocimientos como al sistema de conocimientos comprobados por la práctica y que constituyen una verdad objetiva, en el sentido de que este sistema de conocimientos al ser verificado se cumple independientemente del sujeto, de su ideología y de su conciencia.

Elementos de la ciencia

En esta definición de ciencia se encuentran cuatro elementos importantes:

a) *objeto*: reunión de hechos orientados en un determinado sentido.
b) *método*: procedimientos de investigación
c) *investigación*: proceso de elaboración de los conocimientos.
d) *teoría*: sistema de conceptos.

Toda ciencia tiene una *teoría* y en toda ciencia se hace *investigación*, por lo tanto lo que diferencia una ciencia de otra es el *objeto* y el *método*.

Toda ciencia al constituirse se plantea *qué* va a investigar y *cómo* lo va a hacer. El *qué* constituye el objeto y el *cómo*, el método**.**

El *objeto* de la ciencia, lo constituye toda la realidad que existe, o sea la materia en movimiento (transformación, evolución), así como las formas de su reflejo en la conciencia del hombre.

Las formas que adopta la materia son muchas, así por ejemplo: los astros, los minerales, los vegetales, los animales, los seres humanos, la sociedad, etc.

Según que su objeto sea la naturaleza (el mundo, el universo) se tienen las ciencias naturales; o, la sociedad, se tienen las ciencias sociales. También hay las ciencias filosóficas cuyo objeto son las leyes más generales de la naturaleza, la sociedad y el pensamiento. Es decir, cada forma de manifestación de la materia es estudiada por una ciencia particular como la Física, la Química, la Biología, la Historia, la Sociología, etc.

Existen *métodos* generales que se utilizan en todas las ciencias como son: el *teórico* (trabajo con ideas, pensamientos, conceptos); el *experimental* (reproducción de fenómenos y procesos en condiciones controladas); el *inductivo* (proceso que va de lo particular a lo general), el *deductivo* (proceso que va de lo general a lo particular), el de *análisis* y el de *síntesis* (descomposición y recomposición de las partes de un objeto de estudio, para encontrar las regularidades); el de analogía (comparación de hechos); el de *matematización* (expresión de hechos reales mediante modelos matemáticos); etc.

A más de estos métodos generales, cada ciencia tiene métodos particulares; por ejemplo para conocer la estructura de determinado compuesto, la Física recurrirá a los rayos X y la Química a las reacciones químicas.

La *investigación* tiene que ver con el conjunto de actividades que se desarrollan durante el proceso de elaboración de los conocimientos, se caracteriza por ser sistemática y siempre dirigida hacia un fin. Todo problema científico se formula conscientemente como un fin que debe ser alcanzado en el transcurso de la investigación. Del problema depende, en gran medida, el carácter de las actividades a desarrollarse.

La formulación del problema es, por lo tanto, una actividad muy importante del investigador. La toma de conciencia y la formulación correcta de cualquier problema nuevo, es una demostración del progreso de la ciencia y se convierte en un gran estímulo para nuevas investigaciones.

Con frecuencia la solución de los problemas en la ciencia exigen grandes esfuerzos de varias generaciones de científicos. Actualmente muchos problemas, tales como la producción de armas atómicas, la conquista del cosmos, el uso pacífico de las energías atómica y nuclear, la preservación del medio ambiente, etc. exigen ingentes recursos económicos y el concurso de verdaderos equipos de investigadores de carácter multidisciplinario. Especialmente complejos resultan ser los problemas científicos que tienen relación con las transformaciones sociales.

En dependencia del carácter de los problemas científicos a solucionar, se pueden distinguir tres formas fundamentales de investigación:

a) investigaciones teóricas fundamentales, dirigidas a la búsqueda de nuevas ideas, caminos y métodos de conocimientos y explicaciones;
b) investigaciones teóricas dirigidas a un fin, que tienen que ver con problemas teóricos ya formulados, con el estudio crítico de soluciones antes propuestas o con la modificación, precisión o comprobación empírica de las leyes, teorías e hipótesis aceptadas en las ciencias. Esta forma de investigación desempeña un papel muy importante en el desarrollo de cualquier ciencia; y
c) investigaciones aplicadas, dirigidas fundamentalmente a la utilización práctica de las leyes y teorías formuladas.

La *teoría* viene a ser el conjunto de los resultados obtenidos en el proceso de elaboración de los conocimientos; está constituida por las generalizaciones o abstracciones de la realidad, por las leyes, teorías y principios descubiertos en ella, gracias a la investigación concreta del objeto del conocimiento, mediante la aplicación de ciertos métodos específicos.

1.4 CARACTERÍSTICAS GENERALES DE LA CIENCIA

Entre las características más importantes de la ciencia se pueden anotar las siguientes:

a) Su desarrollo no es lineal, no es secuencial. Esto quiere decir que los nuevos conocimientos no son consecuencia, no se desprenden de los anteriores, sino que más bien se originan de contradicciones, de rupturas con aquellos, pero sin invalidarlos; por esto el desarrollo científico no ha sido fácil, incluso en ocasiones ha pasado por crisis que han hecho historia.

b) Su desarrollo no es ahistórico; lo que significa que está condicionado por las circunstancias históricas de la época en que se produce.

c) Su desarrollo no es neutro; está determinado también por las condiciones e intereses socio-económicos y políticos.

d) No es dogmática; los conocimientos científicos no son actos de fe, puesto que no son proposiciones aceptadas como verdades por ser enunciadas por alguna persona reconocida como autoridad científica, sino que provienen del estudio sistemático de la realidad y por lo tanto de su verificación práctica. Los conocimientos científicos no son verdades absolutas, puesto que están en permanente evolución, en función de las nuevas realidades a las que el hombre tiene acceso, las mismas que permiten llegar a concepciones cada vez más generales de la realidad. Se puede decir que los conocimientos científicos son válidos en la medida en que responden a la explicación del modelo para el que fueron desarrollados.

e) El conocimiento es verificable; el criterio de verdad es la práctica, es decir el experimento y la industria.

f) No solo explica sino que permite predecir.

1.5 LA CIENCIA FÍSICA

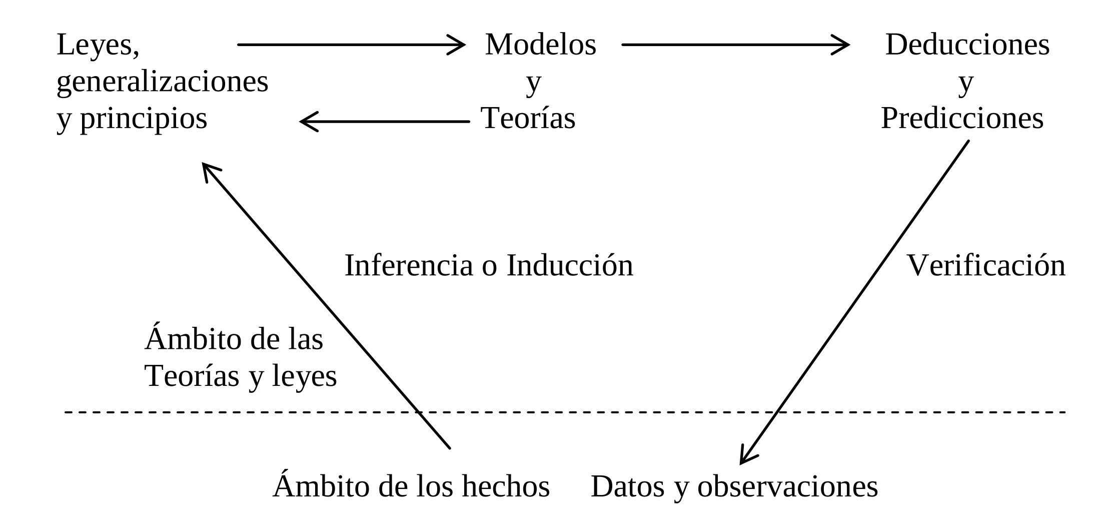
Elementos

Objeto

La ciencia Física estudia las interacciones de la naturaleza de una manera formal, lo que permite entender las diferentes formas en que se manifiesta la materia: sustancia, campo, energía y onda, así como los movimientos más generales de la misma, tales como el movimiento mecánico, electromagnético, atómico, el nuclear, etc.

Método

El método utilizado en la ciencia Física se puede sintetizar en el siguiente esquema, tomado de la Estructura y Didáctica de las Ciencias de Elías Fernández Uría.



De acuerdo con este esquema, la ciencia Física construye modelos y teorías interpretativas, a partir de leyes y generalizaciones inferidas o inducidas de observaciones de determinados hechos experimentales o naturales. Estos modelos permiten realizar deductivamente una serie de predicciones, las cuales deberán ser verificadas con el propósito de poner a prueba la bondad y calidad de los mismos. Se recogen aquí, por consiguiente, dos aspectos fundamentales: el empírico (observación de sucesos naturales y de procesos experimentales) y el lógico – teórico (inferencia de leyes y construcción de teorías).

Desarrollo de las teorías físicas

En la historia del desarrollo de las ciencias naturales se pueden distinguir dos etapas, que si bien no están perfectamente definidas en el tiempo, al menos tienen características diferentes.

La primera etapa, que va aproximadamente desde el siglo V a.n.e. hasta el siglo XVII d.n.e., se caracterizó porque en las ciencias naturales experimentales se usó, como forma de obtención de los conocimientos, fundamentalmente la observación, la relación causa efecto y el sentido común, lo que le llevó al hombre en muchos de los fenómenos observados a una serie de generalizaciones especulativas, ilusorias y por lo tanto equívocas, Al respecto se podría mencionar a manera de ejemplos, la Teoría Geocéntrica y la conocida tesis errónea de Aristóteles acerca de que no puede haber movimiento sin fuerza.

La razón principal de la inconsistencia de estas generalizaciones radicaba precisamente en la limitación de la observación. Aristóteles y sus seguidores trataban de explicar las causas de los fenómenos por medio de observaciones fragmentarias con menosprecio de la práctica.

La segunda etapa, que va desde el siglo XVII hasta nuestros días, se caracteriza, en cambio, por la implementación del método científico por parte de Galileo, cuyo mayor aporte fue la unificación de las investigaciones teóricas y experimentales en un todo único. Galileo no deja de lado la teoría, sino que la involucra en el enfoque teórico del planteamiento del experimento y en la interpretación de los resultados experimentales. Según Galileo, el experimento solo tiene un valor científico cuando se convierte en objeto de interpretación teórica. “El mismo experimento”, afirmó Galileo, “que a primera vista engendra una opinión, si se le analiza mejor nos enseña lo contrario”.

Por lo expuesto se considera que la Física como ciencia empieza con Galileo y Newton. Newton, en su obra más importante llamada “Principios matemáticos de la Filosofía Natural”, comienza con un grupo de definiciones y axiomas, interconectados de tal forma que constituyen lo que se conoce como un sistema cerrado de conceptos, que consta básicamente de las tres Leyes de Newton más la Ley de la Gravitación Universal, que en conjunto dan la teoría del movimiento de las partículas, de donde se puede pasar a la Mecánica de los cuerpos sólidos, a los movimientos rotacionales, a los movimientos continuos de los fluidos, a los movimientos vibracionales de los cuerpos elásticos y a la Astronomía.

Cuando se descubrieron los fenómenos eléctricos y magnéticos y se los comparó con los gravitacionales, se vio que el movimiento de los electrones también se podría estudiar a base de la Mecánica Newtoniana.

Finalmente, en el siglo XIX, incluso la teoría del calor se podía reducir a la Mecánica. La primera dificultad surgió en las discusiones sobre el campo electromagnético, en los trabajos de Faraday y Maxwell, en los que el campo de fuerzas se convirtió en objeto de investigación.

Newton había introducido una hipótesis nueva y extraña a lo que se pensaba, al asumir una fuerza que actuaba a distancia. Ahora con la teoría de los campos de fuerza se podía regresar a la vieja idea de que la acción es transferida de un punto al punto vecino solamente con la descripción del comportamiento de este nuevo concepto del campo de fuerza.

Los axiomas y definiciones de Newton se referían a los cuerpos y su movimiento, pero con Maxwell los campos de fuerzas habían adquirido el mismo grado de realidad que los cuerpos en la teoría de Newton.

Este punto de vista no fue aceptado fácilmente y, para evitar un cambio radical en la concepción de la realidad, muchos físicos sostenían que las ecuaciones de Maxwell se referían a las deformaciones de un medio elástico al que le llamaron éter.

Posteriormente, la teoría de la relatividad mostró que el concepto de éter, como una sustancia, debía ser abandonada y que los campos debían ser considerados como una realidad independiente. Esta misma teoría descubrió nuevas propiedades del espacio y del tiempo, que no se conocían y no existían en la Mecánica Newtoniana, razón por la cual debía ser remplazada por otra diferente, o sea por un nuevo sistema cerrado de conceptos, que se adapte a las nuevas realidades observadas. Así es como avanza o se desarrolla la ciencia, esto es, pone a prueba las teorías existentes o vigentes a las nuevas realidades observadas, para que, en caso de que se produzcan inconsistencias, se desarrollen nuevas teorías que expliquen las nuevas realidades, a las que ya ha tenido acceso el hombre.

Según Heisenberg, hasta 1958, son cuatro los sistemas cerrados de conceptos que han alcanzado su forma final:

1. La Mecánica Newtoniana, que explica todos los sistemas mecánicos.
2. La Teoría del Calor, que al ir desde una descripción puramente fenomenológica hacia una interpretación estadística, se ganó el derecho a constituirse en un sistema aparte de la Mecánica.
3. El Electromagnetismo, que incluye la electrodinámica, la relatividad especial, la óptica y el magnetismo.
4. La Teoría Cuántica, que comprende la mecánica cuántica y la ondulatoria, la teoría de los espectros atómicos, la química y la teoría de otras propiedades de la materia, como la conductividad y el ferromagnetismo.

Las relaciones entre estos cuatro sistemas cerrados se dan de la siguiente forma:

a) 1 está contenido en el 3, cuando la velocidad de la luz se considera infinitamente grande.

b) 1 está contenido en el 4, cuando la constante de Planck se considera infinitamente pequeña.

c) 1 y parte del 3 pertenecen al 4.

d) 2 puede conectarse con cualquiera de los otros sistemas, sin dificultad, y es especialmente importante su relación con el 4.

El hecho de que el 3 y el 4 sean independientes sugiere la existencia de un quinto conjunto, del cual el 1, el 3 y el 4 sean casos límite, este nuevo sistema de conceptos será encontrado en relación con la teoría de las partículas elementales.

En la actualidad existe ya un quinto sistema cerrado de conceptos que es la Teoría General de la Relatividad, en la cual se basan la Cosmología y la Astrofísica, que en este siglo han tenido un gran desarrollo.

Características particulares

1. Es la más fundamental y general de las ciencias naturales, por ello se dice que es una ciencia básica. Dos argumentos que demuestran esta afirmación son:

    a) la durabilidad y permanencia de sus conceptos e ideas. Las leyes de Newton, las ecuaciones de Maxwell siguen vigentes.

    b) Los conceptos y teorías de la Física se utilizan en las otras ciencias.

2. La Física es inherentemente simple. Si se toman en cuenta sus efectos de gran alcance en la ciencia y en la sociedad, el número de ideas subyacentes en esta disciplina es extraordinariamente pequeño. Las mismas ideas fundamentales son usadas una y otra vez.

Los conceptos fundamentales son muy pocos: fuerza, energía y campo. Las leyes fundamentales son pocas: las 3 leyes de Newton en la Mecánica, las 3 leyes de la Termodinámica, las 4 leyes de Maxwell en el electromagnetismo.

Los mismos principios se aplican en toda la Física: el de conservación de la masa, el de conservación de la energía, el de conservación de la cantidad de movimiento lineal, el de conservación de la cantidad de movimiento angular, el de conservación de la carga, el principio de relatividad, el de cuantización, el de simetría.

La Física y su relación con otras ciencias

Es indudable que la Física, dado su carácter de ciencia básica, está estrechamente relacionada con todas las ciencias, como se ilustra a continuación.

La Física y la Química

En sus inicios la Química estudiaba los elementos y la formación de compuestos a partir de aquellos (reacciones químicas). La interacción de la Química con la Física permitió comprender la teoría atómica por medio de experimentos químicos. A partir de la tabla periódica de Mendeleiev y con una serie de métodos y reglas empíricas se describía qué sustancias y cómo podían combinarse, pero no había una teoría coherente que explicara la Química. Esta situación se mantuvo hasta que apareció, en la Física, la Teoría Cuántica que permitió explicar las reacciones químicas. Debido a que las reglas empíricas de la Química pueden ser explicadas con leyes teóricas generales de la Teoría Cuántica, la Química Teórica es, en realidad, Física. Los químicos teóricos no son más que físicos que estudian procesos químicos.

La Física y la Biología

La Biología estudia los seres vivos. Como los seres vivos constituyen la materia más compleja que existe es natural que, inicialmente, la Biología fuera descriptiva y estudiara qué cosas vivas habían y cómo funcionaban, pero desde un punto de vista muy global.

Con el tiempo se descubrió que muchos procesos biológicos son procesos físicos (circulación de la sangre, el funcionamiento del corazón, la transmisión de estímulos nerviosos, etc.) y que, incluso las moléculas del ADN, que se pensaba eran el secreto de la vida, se someten a las leyes físicas.

Todos los objetos, inertes y vivos, están hechos de los mismos átomos y por tanto los fenómenos y procesos biológicos a escala atómica y molecular se rigen por las mismas leyes físicas.

La Física y la Astronomía.

La Astronomía es más antigua que la Física y su estudio del movimiento de los astros dio inicio a la Física. Las estrellas están compuestas de los mismos átomos que la Tierra. Su comportamiento está determinado por las mismas leyes básicas de la Física.

La Física y la Matemática

La Matemática no es una ciencia natural, es una ciencia formal. Tiene su objeto y su método propios.

Una de las características más importantes de la Física moderna es que todas las conclusiones que se han obtenido tienen un doble carácter: cualitativo y cuantitativo. Para poder llegar a conclusiones cuantitativas es necesario el lenguaje de la Matemática.

La Matemática como instrumento de razonamiento es indispensable si se quiere obtener resultados que puedan someterse a pruebas experimentales.

Además, se vio anteriormente que la Física trabaja con conceptos, que son útiles si se los expresa matemáticamente.

1.6 CANTIDADES

Cantidades Físicas

La Física trabaja con conceptos que se pueden definir operacionalmente, en función de cantidades que pueden ser medidas. Desde este punto de vista las cantidades pueden ser *fundamentales*, que se miden directamente y que no se pueden definir en función de otras más simples; y, *derivadas***,** aquellas que se pueden definir en función de las anteriores.

Como las cantidades fundamentales no se pueden definir en función de otras más simples, para su medida es necesario definir estándares o patrones seleccionados arbitrariamente, los mismos que luego deberán ser aceptados universalmente.

En el Sistema Internacional (S. I.) las cantidades fundamentales son: longitud (metro), masa (kilogramo), tiempo (segundo), intensidad de corriente (amperio), intensidad luminosa (candela), cantidad de sustancia (mol) y temperatura (Kelvin).

Como resultado de la medición de una cantidad se tiene la *magnitud* de esa cantidad que consta de un número positivo y una unidad de medida.

Cuando se define una cantidad en función de las cantidades fundamentales se habla de la dimensión de la cantidad. En el siguiente cuadro se ponen algunos ejemplos ilustrativos.

Cantidad	Unidad	Magnitud	Dimensión
Longitud	m	10 m	L
Masa	kg	2 kg	M
Tiempo	s	30 s	T
Velocidad	m/s	20 m/s	LT^{-1}
Aceleración	m/s^2	$5\ m/s^2$	LT^{-2}
Fuerza	N	40 N	MLT^{-2}

Mediciones

Los conceptos son susceptibles de cuantificación, es decir de medición. Se entiende por medición la comparación de una cantidad con otra de la misma especie, que arbitrariamente se toma como patrón de medida.

En una medición se puede hablar de *exactitud* y *precisión*.

La *exactitud* tiene que ver con la correspondencia del patrón utilizado para la medición con el patrón universalmente reconocido.

La *precisión* se relaciona con la menor división de la escala del aparato de medición. Por ejemplo, si se realiza una medida con una regla cuya menor división es 1 mm, la precisión es de 1 mm; entonces, si al hacer una medición con esta regla da 13.72 cm, quiere decir que el primer decimal es correcto, puesto que se puede leer hasta los milímetros y que el segundo decimal constituye la primera cifra aproximada.

Toda medición se expresa con las llamadas cifras significativas, las mismas que están formadas por todas las cifras correctas mas la primera cifra aproximada; por lo tanto, una medida hecha con una regla graduada en centímetros no da lo mismo expresarla como 35 cm que como 35.0 cm, ya que, en el primer caso se entendería que el 3 es la única cifra correcta y el 5 la primera cifra aproximada; en cambio, en el segundo caso se entendería que el 3 y el 5 son cifras correctas y el cero, la primera cifra aproximada.

Cuando se hacen cálculos con cantidades medidas, el número de cifras significativas del resultado debe ser igual al número de cifras significativas de la cantidad conocida con la menor precisión en el cálculo. Por ejemplo, suponga que se ha medido la masa de tres cuerpos *A*, *B* y *C*, pero con precisiones diferentes, de tal manera que sus valores son:

$$m_A = 14.0 \text{ kg} \quad m_B = 3.12 \text{ kg} \quad \text{y } m_C = 7.125 \text{ kg}.$$

Si se quiere encontrar la masa total, se tendría que sumar:

$$(14.0 + 3.12 + 7.125) \text{ kg} = 24.2 \text{ kg}.$$

La respuesta correcta sería 24.2 kg, puesto que la cantidad que se conoce con la menor precisión es la masa de *A*, que tiene solamente tres cifras significativas.

BIBLIOGRAFÍA

1. Academia de Ciencias de Cuba, Academia de Ciencias de la URSS, “Metodología del Conocimiento Científico”, Imprenta de la ciudad de Guayaquil, Guayaquil, Ecuador, 1985.

2. Ximena Núñez, “El Pensamiento Filosófico de Copérnico a Marx”, Editorial Universitaria, Quito, Ecuador, 1984.

3. Gaspar Jorge García Galló, “Glosas sobre el libro de Lenin Materialismo y Empiriocriticismo”, Editorial Academia, La Habana, Cuba, 1979.

4. Alexander Kitaigorodski, “La Física en casi todas las esferas de la vida”, Editorial Axioma, Buenos Aires, Argentina, 1976.

5. Elías Fernández Uría, “Estructura y Didáctica de las Ciencias”, Ministerio de Educación, Instituto Nacional de Ciencias de la Educación, Madrid, España, 1979.

6. Borowitz and Bornstein, “A Contemporary View of Elementary Physics”, Mc Graw –Hill, USA,1968.

7. Albert Einstein, Leopold Infeld, “La Evolución de la Física”, Biblioteca Científica Salvat, Barcelona, España, 1986.

8. George Gamow, “Biografía de la Física”, Biblioteca Científica Salvat, Barcelona, España, 1986.

9. Werner Heisenberg, “Physics and Philosophy”, Harper y Row Publishers, New York, USA, 1962.

CAPÍTULO 2

CINEMÁTICA

CAPÍTULO 2

CINEMÁTICA

El movimiento mecánico de los cuerpos es el movimiento más simple. Para entender cómo se produce y mantiene un cuerpo en movimiento, se debe describirlo en forma matemática. A la descripción matemática del movimiento se denomina *Cinemática.*

La Cinemática estudia el movimiento de los cuerpos desde un punto de vista geométrico, sin considerar las causas que lo modifican. En un principio, los *cuerpos* se van a considerar como *partículas*.

2.1 EL MOVIMIENTO

El *movimiento* de una *partícula* es el cambio de *posición* de la misma, con respecto a un *sistema de referencia* y en el transcurso del *tiempo*. Si no hay cambio de posición se dice que la partícula está en *reposo* con respecto al sistema de referencia.

Cuando las dimensiones del *cuerpo* son despreciables, en comparación con las dimensiones en las cuales se produce el movimiento, el cuerpo puede ser tratado como una *partícula*; es decir, como un punto geométrico. Por ejemplo, la Tierra en su movimiento alrededor del Sol puede ser considerada como partícula, no así en su movimiento de rotación alrededor de su eje.

La descripción del movimiento de una partícula se realiza con respecto a un *sistema de referencia*.

En matemática, un *sistema de coordenadas* está constituido por uno, dos o tres ejes orientados según se quiera trabajar en una dimensión (la recta), en dos dimensiones (el plano) o en tres dimensiones (el espacio), como se indica en la Fig. 2-1.

En física, un *sistema de referencia* (SR) está constituido por un sistema de coordenadas unido a un cuerpo. El cuerpo del SR generalmente es el laboratorio, pero también puede ser una carretera, o un automóvil estacionado o en movimiento. Si el cuerpo del SR está en reposo, el SR está en reposo, y si el cuerpo del SR está en movimiento, el SR se mueve conjuntamente con él.

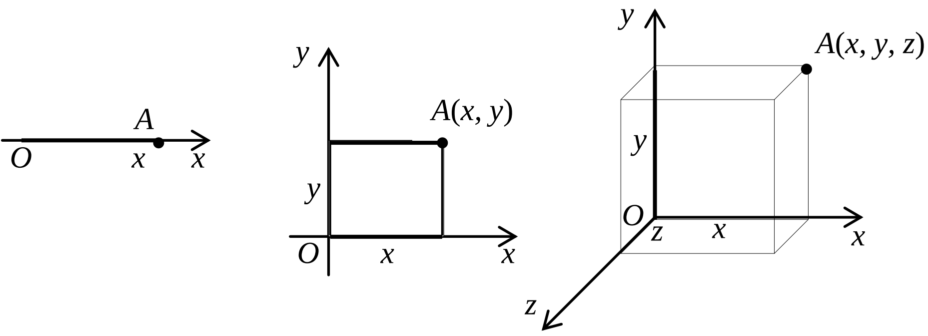


Figura 2-1. Sistemas de coordenadas

En un SR se hacen las mediciones de las cantidades físicas que interesen; en el caso de la cinemática se medirán directamente distancias y tiempos, e indirectamente velocidades y aceleraciones. En general, una misma cantidad física, la velocidad por ejemplo, referente a un mismo cuerpo pero medido en distintos SR va a dar valores diferentes. Las medidas de las cantidades físicas son, entonces, *relativas* a un SR.

La cinemática se desarrolla fundamentalmente a partir de las mediciones de la *posición* del cuerpo estudiado en función del *tiempo*.

La posición de una partícula se determina básicamente al medir distancias en un SR. Esta cantidad informa donde está la partícula a un instante dado. Si la posición de una partícula se mide en un SR dado, entonces el movimiento de la partícula es relativo a ese SR.

Si se une con una línea continua las distintas posiciones que va ocupando la partícula en el transcurso del tiempo se obtiene la *trayectoria* de la partícula. Si la línea es recta se dirá que el movimiento es rectilíneo (MR) y si es curva, curvilíneo; si la curva es una parábola o una circunferencia, se hablará de un movimiento parabólico (MP) o circular (MC), respectivamente. Si se conoce cómo cambia la posición con el tiempo es muy fácil encontrar la *ecuación de la trayectoria.*

Considere la siguiente situación física: un automóvil viaja por una carretera curva, como la indicada en la Fig. 2-2, de modo que durante el primer día viaja desde la ciudad A hasta la B y en el segundo, desde la ciudad B hasta la C. El efecto neto del viaje durante los dos días es que partió desde la ciudad A y llegó a la ciudad C. A los “efectos” de los viajes se denominarán desplazamientos del automóvil y se representarán con los segmentos dirigidos de recta **AB**, **BC** y **AC**.

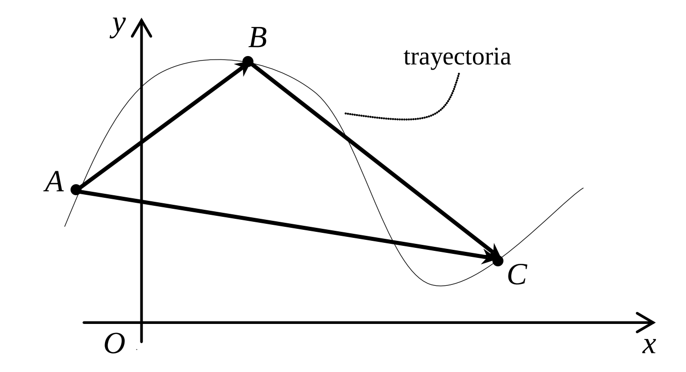


Figura 2-2. La suma de los desplazamientos no se comporta como la suma de las longitudes: **AB** + **BC** = **AC**, pero AB + BC ≠ AC

Parece natural afirmar que el efecto neto del viaje durante los dos días es igual al efecto del viaje durante el primer día más el efecto del viaje durante el segundo día. Este resultado se representa gráficamente con el triángulo de segmentos dirigidos de recta de la Fig. 2-2, y analíticamente con la expresión:

$$\mathbf{AB} + \mathbf{BC} = \mathbf{AC}.$$

Es evidente que si se suman las longitudes de los segmentos dirigidos de recta se obtiene la siguiente relación:

$$AB + BC \neq AC$$

Por lo tanto, la suma de los desplazamientos no se comporta como la suma de las longitudes, porque influye la dirección de los desplazamientos. Esto lleva a la necesidad de definir unas nuevas cantidades.

En la física existen las cantidades escalares y las vectoriales. Las cantidades escalares están determinadas por su magnitud y se suman como los números ordinarios; ejemplos de ellas son la longitud, la masa y el tiempo. Las cantidades vectoriales, a más de la magnitud, requieren de una dirección para su determinación, y se suman como los desplazamientos; ejemplos de ellas son la posición, el desplazamiento ya visto, la velocidad, la aceleración, la fuerza, etc.

2.2 VECTORES

Para estudiar los vectores se los va a representar con un segmento dirigido de recta. La *magnitud* y la *dirección* del vector están representadas por la longitud y la dirección, respectivamente, del segmento dirigido de recta.

Formas de indicar la dirección de un vector

Un segmento dirigido de recta forma un ángulo con cualquier recta de referencia. Con este fin, es más cómodo escoger la dirección positiva del eje x (o simplemente, el eje x +). Entonces, la dirección del vector viene dado por el ángulo θ que forma el vector con el eje x +. El ángulo θ puede ser positivo o negativo según que el sentido de medición del mismo sea contrario o igual al avance de las manecillas de un reloj, respectivamente. Vea la Fig. 2-3.

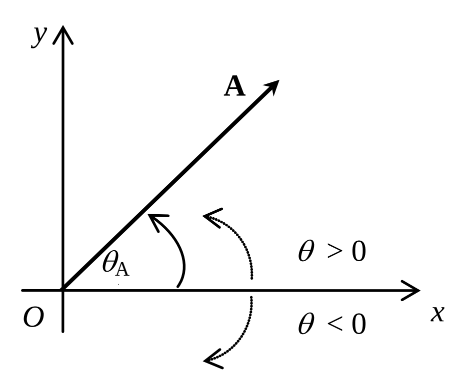


Figura 2-3 Representación de un vector como segmento dirigido de recta

Al vector se lo designa por **A**, a su magnitud, A ó |**A**|, con lo cual se puede representar al vector en forma polar de la siguiente manera:

$$\mathbf{A} = (A;\ \theta_A) \qquad (1\text{-}1)$$

Dos vectores son iguales si tienen igual magnitud y dirección. Esto implica que un vector puede ser trasladado siempre que se conserve su magnitud y dirección.

Ejercicio Exprese en la forma **A** = (A; θ_A) los vectores de la Fig. 2-4 (a).

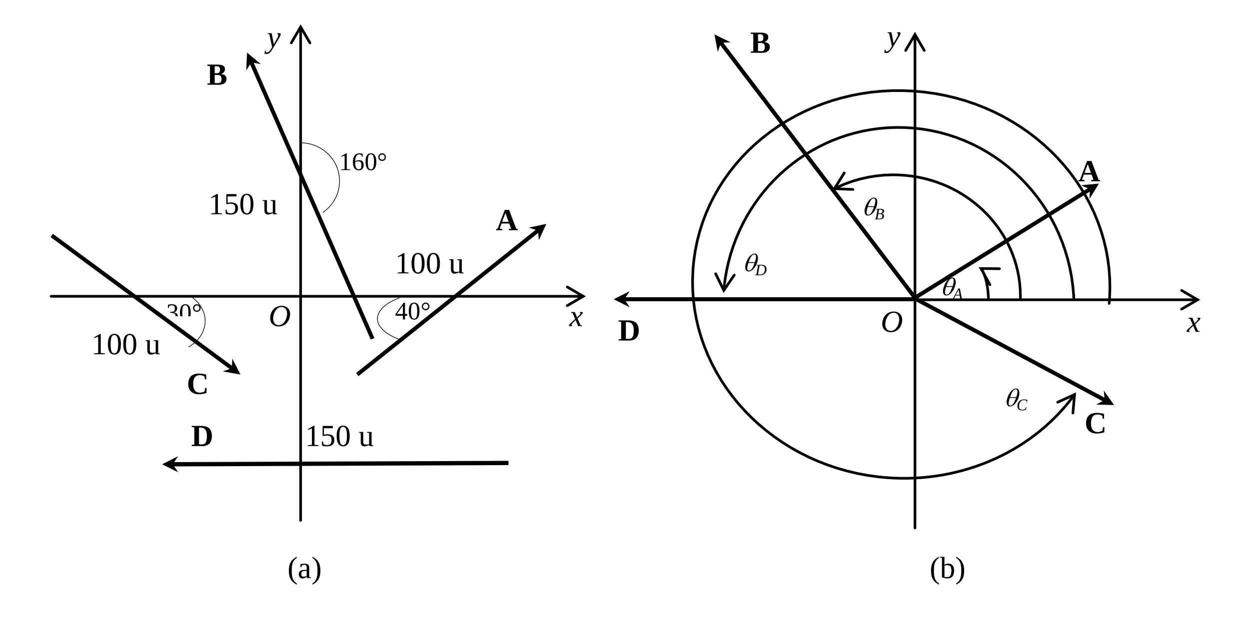


Figura 2-4

Si se trasladan los vectores de la Fig. 2-4 (a) al origen, como se indica en la Fig. 2-4 (b), fácilmente se encuentra que θ_A = 40°, θ_B = 110°, θ_C = 330° y θ_D = 180°. La respuesta es:

$$\mathbf{A} = (100\,\text{u}; \theta_A = 40°)\,, \mathbf{B} = (150\,\text{u}; \theta_B = 110°)\ \mathbf{C} = (100\,\text{u}; \theta_C = 330°)\ \text{y}\ \mathbf{D} = (150\,\text{u}; \theta_D = 180°)$$

Si los vectores se encuentran en un plano horizontal se pueden utilizar los puntos cardinales para indicar su dirección geográfica, como se indica en la Fig. 2-5.

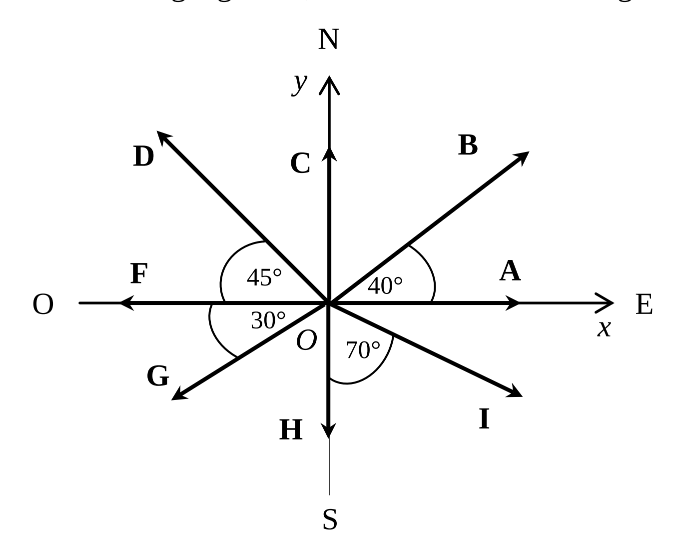


Figura 2-5

A los vectores de la Fig. 2-5 se los escribe así: **A** = (*A*; E), **B** = (*B*; N 50° E), **C** = (*C*; N), **D** = (*D*; NO), **F** = (*F*; O), **G =** (*G*; S 60° O), **H** = (*H*; S) y **I** = (*I*; S 70° E).

La dirección de un vector también se puede indicar con su unitario, un vector adimensional de magnitud igual a la unidad.

Operaciones con vectores

Entre las operaciones vectoriales se tienen las siguientes:

a) suma de vectores **A** y **B** que da como resultado otro vector; y,
b) producto de un escalar *m* por un vector **A**, que es otro vector.

La suma y el producto tienen varias propiedades entre las cuales se tienen:

1. Propiedad conmutativa: **A** + **B** = **B** + **A**
2. Propiedad asociativa: (**A** + **B)** + **C** = **A + (B** + **C)**
3. Propiedad distributiva: *m***(A** + **B)** = *m***A** + *m***B;** (*m* + n)**A** = *m***A** + *n***A**
4. Propiedad asociativa mixta: (*m n*) **A** = *m* (*n* **A**)

Suma de vectores

Para sumar vectores en forma gráfica, se van colocando los vectores uno a continuación de otro de modo que el origen del segundo vector sumando coincida con el extremo del primer vector, el origen del tercero, con el extremo del segundo, y así sucesivamente. El vector resultante es aquel cuyo origen coincide con el origen del primer vector y cuyo extremo coincide con el extremo del último vector, como se indica en la Fig. 2-6.

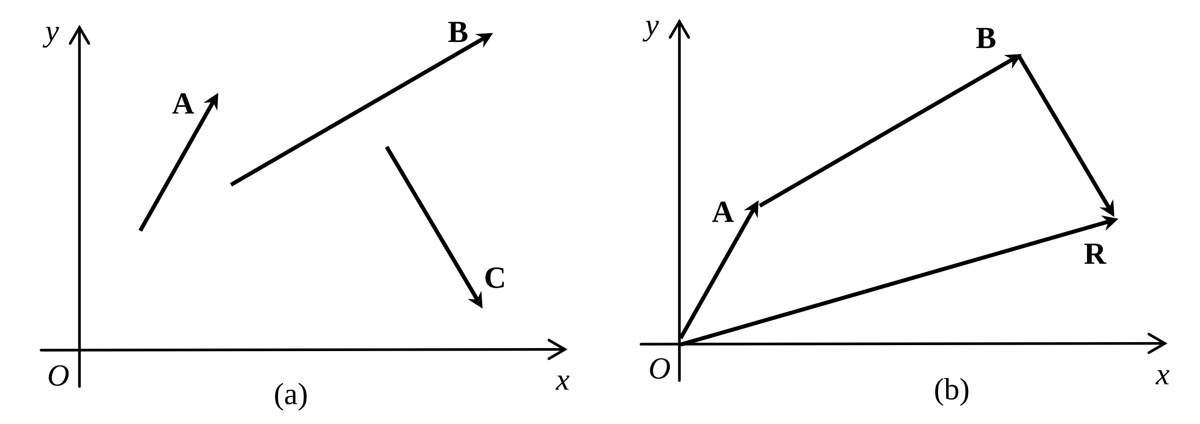


Figura 2-6 Suma de vectores. **R** = **A** + **B** + **C**

Este procedimiento, conocido como el método del polígono, permite encontrar la solución de manera gráfica. La longitud R del vector resultante, medida con una regla, y el ángulo θ_R, medido con un graduador, definen al vector **R** en forma polar:

$$\mathbf{R} = (R;\ \theta_R)$$

El vector negativo de **A,** notado **–A**, es un vector tal que:

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0} \qquad (1\text{-}2)$$

donde **0** es el vector nulo.

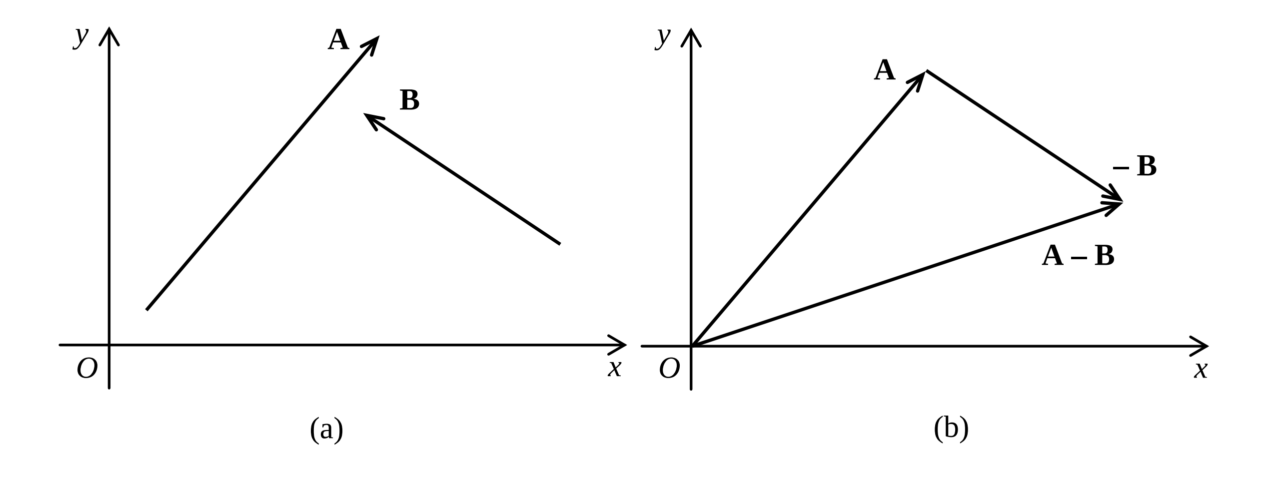


Figura 2-7 Resta de vectores: **A – B** = **A** + (**–B**)

El vector **–A** es un vector de igual magnitud que el vector **A** pero de dirección contraria. La diferencia de los vectores **A** y **B,** notada **A – B,** se define como:

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) \qquad (1\text{-}3)$$

En la Fig. 2-7 se muestra la resta de vectores.

Producto de un escalar por un vector

El producto de un escalar *m* por un vector **A** es otro vector cuya magnitud es $|m|A$, donde $|m|$ es el valor absoluto de *m*, y cuya dirección es igual a la de **A** si $m>0$ y contraria si $m<0$, como se puede ver en la Fig. 2-8.

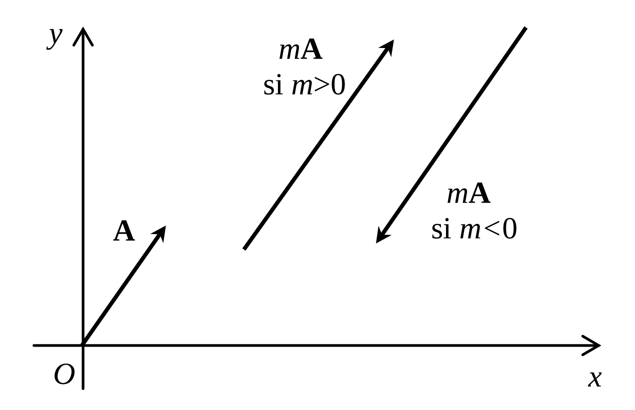


Figura 2-8 Producto de escalar por vector

Composición y descomposición de vectores

Primero se verán los vectores en el plano *xy* antes de analizar en el espacio *xyz*. Dado un vector **A** se puede descomponerlo en dos o más vectores, que se llamarán componentes vectoriales del vector. Componentes vectoriales de un vector **A** son todos los vectores que sumados dan como resultado el vector **A.** Vea la Fig. 2-9.

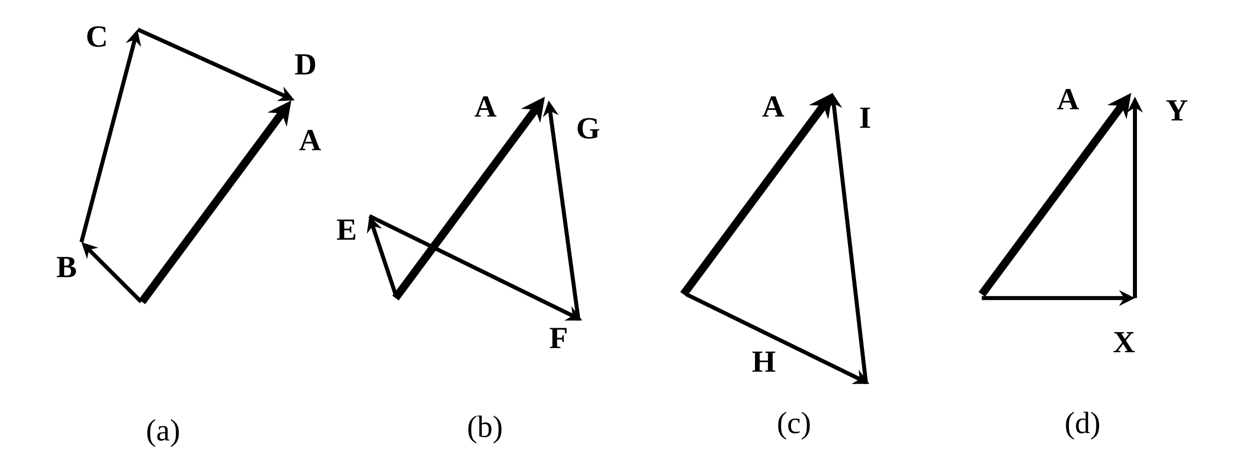


Figura 2-9 Componentes vectoriales de un vector. (a) **A** = **B** + **C** + **D**, (b) **A** = **E** + **F** + **G**, (c) **A** = **H** + **I**, (d) **A** = **X** + **Y**

Los vectores **B**, **C** y **D**; **E**, **F** y **G**; **H** e **I**; **X** y **Y** son las componentes vectoriales de **A** en cada uno de los casos representados en la Fig. 2-9.

Componentes vectoriales de un vector

Existe un número infinito de formas de descomponer un vector en dos, tres, etc. vectores cualesquiera. Sin embargo, solo existe una forma de descomponer un vector **A** en dos vectores de modo que el uno sea paralelo al eje *x* y el otro, al eje *y*. A estos vectores se los llamarán componentes vectoriales rectangulares del vector **A** o, simplemente, componentes vectoriales, que se denotarán como $\mathbf{A}_X$ y $\mathbf{A}_Y$ y se obtendrán al proyectar el vector sobre los ejes *x* y *y*. Vea la Fig. 2-10.

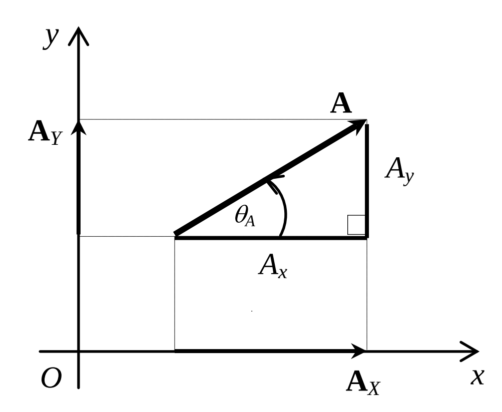


Figura 2-10 Componentes vectoriales $\mathbf{A}_X$ y $\mathbf{A}_Y$, y componentes A_x y A_y, en *x* y en *y* del vector **A**, respectivamente

Como se puede observar en la Fig. 2-10; se tiene que

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_X + \mathbf{A}_Y \qquad (1\text{-}4)$$

Componentes de un vector

Las componentes rectangulares o, simplemente, componentes del vector $\mathbf{A} = (A;\ \theta_A)$ son A_x y A_y, que se muestran en la Fig. 2-10 y que se determinan así:

$$A_x = A \cos\theta_A \qquad (1\text{-}5a)$$

$$A_y = A \operatorname{sen}\theta_A \qquad (1\text{-}5b)$$

A partir de la forma polar del vector $\mathbf{A} = (A;\ \theta_A)$ se obtiene un par ordenado $(A_x,\ A_y)$ único, que define al vector **A**. Si del vector **A** se conocen sus componentes A_x y A_y, se puede encontrar su magnitud y dirección con las expresiones:

$$A = \sqrt{A_x{}^2 + A_y{}^2} \qquad (1\text{-}6a)$$

$$\theta_A = \arctan\,(A_y / A_x) \qquad (1\text{-}6b)$$

La magnitud de un vector es siempre positiva, pero sus componentes A_x y A_y pueden ser positivas, negativas o cero.

Vector unitario de un vector

Sea el vector **A** = (A; θ_A). Se define el vector unitario del vector **A**, notado $\mathbf{u}_A$, como el vector:

$$\mathbf{u}_A = (1/A)\,\mathbf{A} \qquad (1\text{-}7)$$

De la expresión anterior se obtiene $\mathbf{A} = A\,\mathbf{u}_A$ que dice que el vector unitario de un vector es su dirección.

La magnitud de cualquier vector unitario, calculada con las expresiones ya definidas, siempre vale 1 (adimensional).

Expresión de un vector A en términos de los vectores unitarios i y j

Las direcciones positivas de los ejes x y y, están definidas por los vectores unitarios **i** y **j**, respectivamente, como se puede ver en la Fig. 2-11.

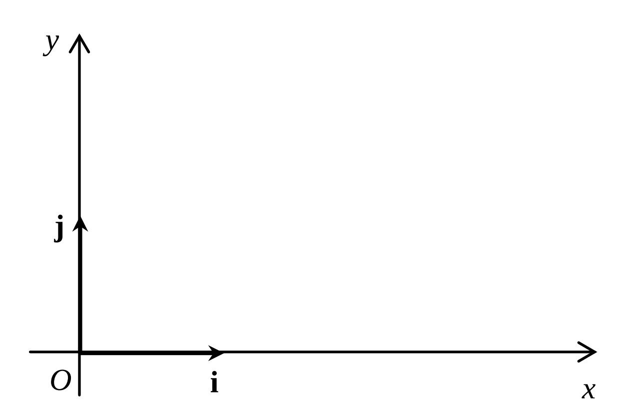


Figura 2-11 Vectores unitarios **i** y **j** en las direcciones $x+$ y $y+$, respectivamente

Anteriormente se dijo que el vector **A** es $\mathbf{A} = \mathbf{A}_X + \mathbf{A}_Y$. Entonces las componentes vectoriales de **A** serán $\mathbf{A}_X = A_x\,\mathbf{i}$ y $\mathbf{A}_Y = A_y\,\mathbf{j}$. Con lo cual se tiene que:

$$\mathbf{A} = A_x\,\mathbf{i} + A_y\,\mathbf{j} \qquad (1\text{-}8)$$

que es la expresión del vector **A** en función de sus componentes A_x y A_y o, lo que es lo mismo, en términos de los unitarios **i** y **j**.

Dados los vectores $\mathbf{A} = A_x\,\mathbf{i} + A_y\,\mathbf{j}$ y $\mathbf{B} = B_x\,\mathbf{i} + B_y\,\mathbf{j}$, el vector $\mathbf{S} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ estará dado por:

$$\mathbf{S} = (A_x + B_x)\,\mathbf{i} + (A_y + B_y)\,\mathbf{j} \qquad (1\text{-}9)$$

La operación anterior está representada en la Fig. 2-12.

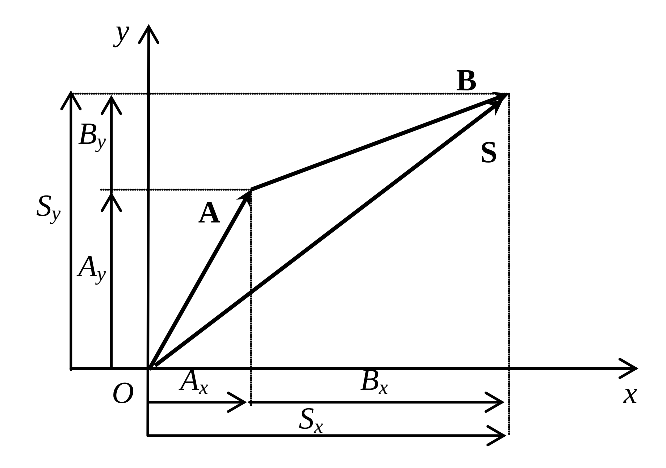


Figura 2-12 Suma de vectores: **S** = **A** + **B** = (A_x + B_x) **i** + (A_y + B_y) **j**

Además, el vector unitario de un vector **A** estará dado por

$$\mathbf{u_A} = (A_x / A)\,\mathbf{i} + (A_y / A)\,\mathbf{j} \qquad (1\text{-}7)$$

Vector posición de un punto con respecto a otro

La posición de un punto *A* respecto a otro punto *B* (*A* y *B* podrían ser dos ciudades o dos puntos en una ciudad) es una cantidad vectorial porque tiene una magnitud (la distancia entre los dos puntos) y una dirección (que puede especificarse por medio de un ángulo). Dicha posición puede representarse gráficamente como se indica en la Fig. 2-13 (a). Un mismo punto puede tener tantas posiciones como puntos de referencia se escojan; en la misma figura se indica la posición de *A* respecto *B* y la posición de *A* respecto a *C*.

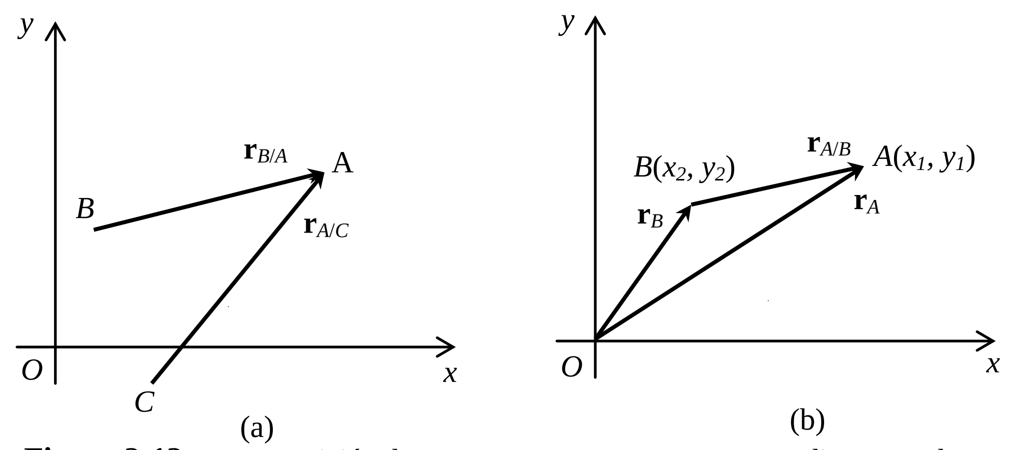


Figura 2-13 Vector posición de un punto con respecto a otro y radio vector de un punto

Un punto de referencia especial es el punto de coordenadas *O* (0, 0), en cuyo caso el vector posición del punto *A* (*x*, *y*) con respecto a *O* (0, 0) toma el nombre de radio vector del punto *A*, notado $\mathbf{r}_A$ y será:

$$\mathbf{r}_A = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} \qquad (1\text{-}10)$$

Las coordenadas del punto A son las componentes del vector.

De acuerdo con la Fig. 2-13 (b), se tiene $\mathbf{r}_B + \mathbf{r}_{A/B} = \mathbf{r}_A$, de donde se deduce que:

$$\mathbf{r}_{A/B} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B \qquad (1\text{-}11a)$$

A partir de la Fig. 2-13 (a) demuestre que

$$\mathbf{r}_{\mathrm{A/B}} = \mathbf{r}_{\mathrm{A/C}} - \mathbf{r}_{\mathrm{B/C}} \qquad (1\text{-}11b)$$

Vectores en el espacio

En el espacio son válidos todos los conceptos vistos para vectores en el plano. Cambia la forma de indicar la dirección, se aumenta una componente y se añade el vector unitario que da la dirección positiva del eje z.

La dirección del vector **A** en el espacio se puede indicar con los ángulos θ y ϕ indicados en la Fig. 2-14, donde OQ es la proyección del vector **A** en el plano xy.

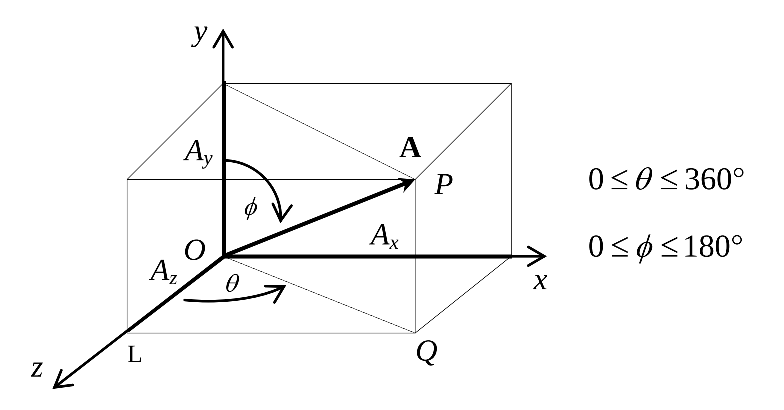


Figura 2-14 Vector A en el espacio definido por su magnitud y los ángulos θ y ϕ

Dado $\mathbf{A} = (A, \theta, \phi)$, se pueden calcular sus componentes con las siguientes expresiones:

$$A_x = \overline{OQ}\,\text{sen}\,\theta = A\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta$$

$$A_y = \overline{OP}\cos\phi = A\cos\phi$$

$$A_z = \overline{OQ}\cos\theta = A\,\text{sen}\,\phi\cos\theta$$

Si se llama **k** al vector unitario en la dirección $z+$, el vector **A** puede escribirse así:

$$\mathbf{A} = A_x\,\mathbf{i} + A_y\,\mathbf{j} + A_z\,\mathbf{k} \qquad (1\text{-}8)$$

Conocidas las componentes A_x, A_y y A_z del vector **A**, se pueden calcular su magnitud y su dirección (θ y ϕ) con las siguientes expresiones:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \qquad (1\text{-}6a)$$

$$\theta = \arctan\,(A_x \;/ A_z)$$

$$\phi = \arccos\,(A_y \,/ A)$$

También se puede indicar la dirección de un vector en el espacio con los ángulos α, β y γ, que forma el vector con los ejes $x+$, $y+$ y $z+$, respectivamente, como se muestra en la Fig. 2-15. A estos ángulos se denomina *ángulos directores* y a sus cosenos, *cosenos directores*.

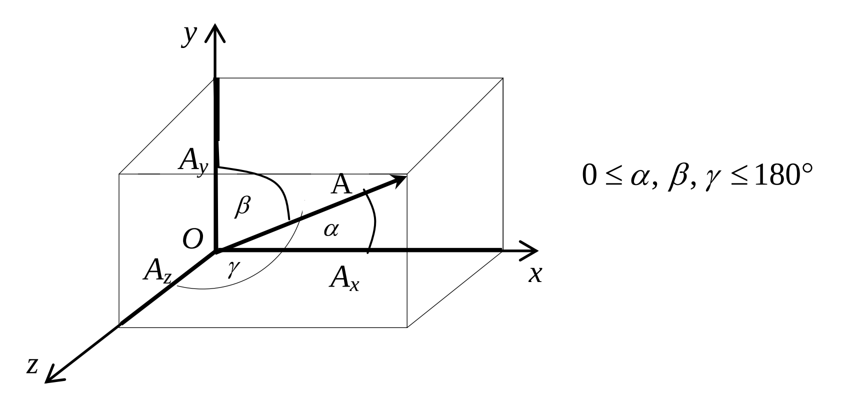


Figura 2-15 Vector **A** en el espacio definido por su magnitud y los ángulos directores α, β y γ

Dado el vector **A** = (A; α, β, γ), se pueden calcular sus componentes con las siguientes expresiones:

$$A_x = A\cos\alpha,\;\; A_y = A\cos\beta,\;\; A_z = A\cos\gamma$$

Conocidas las componentes A_x, A_y y A_z, los ángulos directores están definidos por las siguientes expresiones:

$$\alpha = \arccos\,(A_x/A),\quad \beta = \arccos\,(A_y/A),\quad \gamma = \arccos\,(A_z/A)$$

Fácilmente se pueden encontrar las siguientes expresiones para el vector unitario de un vector **A**:

$$\mathbf{u}_A = (A_x/A)\;\mathbf{i} + (A_y/A)\,\mathbf{j} + (A_z/A)\,\mathbf{k} \qquad (1\text{-}7)$$

$$\mathbf{u}_A = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\;\mathbf{k}$$

El vector **A** será:

$$\mathbf{A} = A\,(\cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k}).$$

Como ejercicio, el lector puede demostrar que:

$$1 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma$$

Esta ecuación permite calcular un ángulo director, cuando se conocen los otros dos.

La suma de los vectores y el producto de un escalar por un vector en el espacio son idénticas a las operaciones vistas con los vectores en el plano.

Producto de vectores

Hay dos formas de realizar el producto de vectores, el *producto escalar* o *punto* y el *producto vectorial* o *cruz.*

Producto escalar o punto

El producto escalar o punto de dos vectores **A** y **B**, que forman entre sí un ángulo θ, notado por $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, da como resultado una cantidad escalar que es igual a:

$$A\, B \cos \theta$$

Es decir, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta$, donde $0° \leq \theta \leq 180°$.

El producto escalar tiene las siguientes propiedades:

1. Conmutativa: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$
2. Distributiva: $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$
3. Asociativa mixta: $m\,(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (m\,\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (m\,\mathbf{B})$, donde m es un escalar

El lector puede demostrar fácilmente las siguientes propiedades:

- $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$
- $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$
- Si $\mathbf{A} = A_x\, \mathbf{i} + A_y\, \mathbf{j} + A_z\, \mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = B_x\, \mathbf{i} + B_y\, \mathbf{j} + B_z\, \mathbf{k}$, entonces $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$
- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2 = A_x{}^2 + A_y{}^2 + A_z{}^2$
- Si **A** y **B** son distintos de cero y si $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}$, entonces **A** y **B** son perpendiculares.

El producto punto permite encontrar el ángulo entre dos vectores con la siguiente expresión:

$$\cos \theta = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) / (A\, B) \qquad (1\text{-}12)$$

La proyección de un vector **A** sobre otro vector **B**, notada A_B, viene dada por

$$A_B = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} / B = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_B \qquad (1\text{-}13)$$

El vector proyección de un vector **A** sobre un vector **B**, notado $\mathbf{A}_B$, se calcula con la expresión:

$$\mathbf{A}_B = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}/ B)\, \mathbf{u}_B = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} / B^2)\, \mathbf{B} \qquad (1\text{-}14)$$

Producto vectorial o cruz

El producto vectorial o cruz de dos vectores da como resultado un tercer vector.

El producto cruz de los vectores $\mathbf{A} = A_x\,\mathbf{i} + A_y\,\mathbf{j} + A_z\,\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = B_x\,\mathbf{i} + B_y\,\mathbf{j} + B_z\,\mathbf{k}$ viene dado por:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C},\ C = A\,B \text{ sen } \theta,$$

donde: $0° \leq \theta \leq 180°$. El vector **C** es perpendicular tanto al vector **A** como al vector **B** y su dirección se define con la regla de la mano derecha, según la cual los dedos recogidos siguen la dirección desde **A** hacia **B**, y el pulgar apuntará en la dirección de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

El producto cruz de dos vectores cumple con las siguientes propiedades:

1. Anticonmutativa: $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$
2. Distributiva: $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$
3. Distributiva mixta: $m\,(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (m\,\mathbf{A}) \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times (m\,\mathbf{B})$, donde m es un escalar

El lector puede demostrar fácilmente las siguientes propiedades:

- $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$
- $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$
- Si $\mathbf{A} = A_x\,\mathbf{i} + A_y\,\mathbf{j} + A_z\,\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = B_x\,\mathbf{i} + B_y\,\mathbf{j} + B_z\,\mathbf{k}$, entonces:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y\,B_z - A_z\,B_y)\,\mathbf{i} + (A_z\,B_x - A_x\,B_z)\,\mathbf{j} + (A_x\,B_y - A_y\,B_x)\,\mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

2.3 VECTOR VELOCIDAD

Una partícula describe una trayectoria curva como la mostrada en la Fig. 2-16. Al instante t_1 la partícula se encuentra en P_1 y a t_2, en P_2. Sus posiciones son $\mathbf{r}_1$y $\mathbf{r}_2$, respectivamente. Como se ve, la posición de la partícula cambia en el transcurso del tiempo por lo cual se dice que la partícula está en movimiento. La función vectorial $\mathbf{r} = \mathbf{f}\,(t)$ indica cómo cambia la posición de la partícula con el tiempo. El cambio de posición se conoce como desplazamiento de la partícula, que es una cantidad vectorial.

En la Fig. 2-16 puede verse que para el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$ corresponde un cambio de posición medido por $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, que es el desplazamiento de la partícula entre t_1 y t_2. Si se quiere encontrar la posición de la partícula al instante t_2, se tendrá que: $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \Delta\mathbf{r}$;

esto quiere decir que a la posición inicial se suma el desplazamiento, para obtener la posición final.

En general, se cumple que la magnitud del desplazamiento es menor que la longitud de la trayectoria y a lo sumo será igual cuando la trayectoria sea una recta y no haya cambio en la dirección del movimiento.

Velocidad media

Es la relación entre el cambio en la posición de una partícula (desplazamiento) y el intervalo de tiempo utilizado en realizar dicho cambio.

$$\mathbf{v}_m = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \qquad (1\text{-}15)$$

La unidad de la velocidad en el SI es m/s y su dimensión es LT^{-1}.

La cantidad $1/\Delta t$ es un escalar positivo por lo que el vector $\mathbf{v}_m$ tendrá la misma dirección que el vector desplazamiento, como se puede ver en la Fig. 2-16.

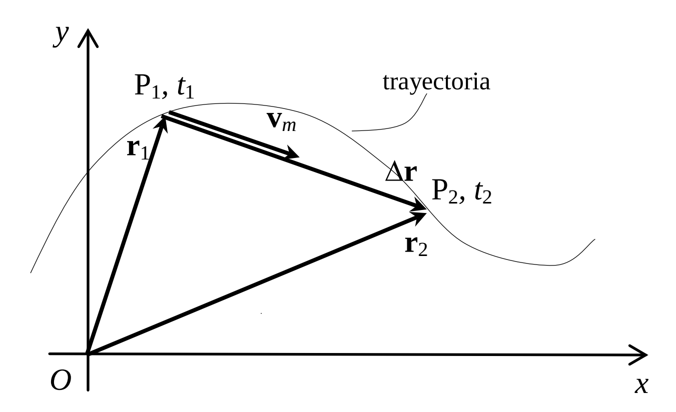


Figura 2-16 Vector desplazamiento $\Delta\mathbf{r}$ y vector velocidad media $\mathbf{v}_m = \Delta\mathbf{r}/\Delta t$ de una partícula para el intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$

Cuando la partícula experimenta desplazamientos iguales en intervalos de tiempo iguales, la velocidad media es constante y se escribe $\mathbf{v} = \Delta\mathbf{r}/\Delta t$. En caso contrario, la velocidad cambia con el tiempo.

Si la partícula de la Fig. 2-16 parte al instante t_1 del punto P_1 y se mueve en línea recta con velocidad constante igual a $\mathbf{v}_m = \Delta\mathbf{r}/\Delta t$, entonces al instante t_2 llegará a P_2, igual que en la realidad, cuando a t_1 parte del punto P_1 avanza por el arco P_1P_2, con una velocidad variable y llega a P_2, a t_2.

Velocidad instantánea

La velocidad media indica cómo cambia la posición para un intervalo de tiempo Δt. Se necesita una cantidad que mida el cambio de posición con el tiempo a un instante dado, es

decir una cantidad instantánea. Esta cantidad es la velocidad instantánea, que en adelante se llamará solo velocidad.

Una partícula se mueve a lo largo de la trayectoria curvilínea mostrada en la Fig.2-17. Al instante *t*, se encuentra en el punto P. Se quiere calcular la velocidad instantánea al tiempo *t*.

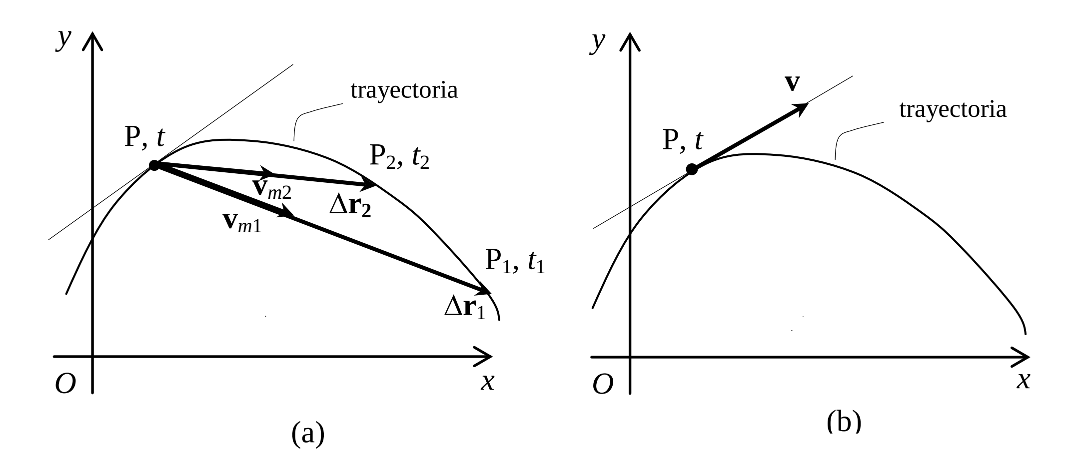


Figura 2-17 (a) El vector velocidad **v** al instante *t* se encuentra como el límite de $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ cuando Δt tiende a cero (b) El vector velocidad **v** al instante *t* es tangente a la trayectoria en dicho instante

A un instante $t_1 = t + \Delta t_1$, la partícula se encuentra en el punto P_1; para el intervalo $\Delta t_1 = t_1 - t$ su desplazamiento es $\Delta\mathbf{r}_1$ y su velocidad media, $\mathbf{v}_{m1} = \Delta\mathbf{r}_1/\Delta t_1$, Vea la Fig. 2-17 (a). Si se disminuye el intervalo, de modo que $\Delta t_2 < \Delta t_1$, y a $t_2 = t + \Delta t_2$ la partícula se encuentra en P_2; para el intervalo $\Delta t_2 = t_2 - t$ su desplazamiento es $\Delta\mathbf{r}_2$ y su velocidad media, $\mathbf{v}_{m2} = \Delta\mathbf{r}_2/\Delta t_2$. Se continuará con el proceso hasta que Δt sea tan pequeño, como se pueda imaginar. En el límite, cuando Δt tiende a 0, la cantidad media $\mathbf{v}_m$ (para el intervalo Δt) tiende a una cantidad instantánea **v** (para el tiempo *t*). Además, las cuerdas PP_1, PP_2, etc. tienden a la tangente a la trayectoria en el punto *P* (al tiempo *t*). En otras palabras, en el límite, cuando Δt tiende a 0, el vector $\mathbf{v}_m$ tiende al vector **v** tangente a la trayectoria en el punto *P* (al tiempo *t*) como se muestra en la Fig. 2-17 (b).

La velocidad instantánea, denotada con **v**, que tiene la partícula en un instante dado o en un punto de la trayectoria, es un vector tangente a la misma en el punto de análisis y matemáticamente, es el límite cuando $\Delta t \to 0$ de la relación $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$, así:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} \qquad (1\text{-}16)$$

A la magnitud de la velocidad se denomina *rapidez,* y cuando la partícula se mueve en el plano *xy*, está dada por:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \qquad (1\text{-}6a)$$

La velocidad es relativa a un SR, es decir una partícula puede tener tantas velocidades como SRs sean usados para su medición. Así por ejemplo, la $\mathbf{v}_{A/B}$ representa la velocidad de una partícula *A*, medida o "vista" desde el cuerpo *B*, que se ha tomado como SR.
Si el cuerpo *B* está en reposo respecto a tierra, se dice que la velocidad $\mathbf{v}_{A/B}$ está definida con respecto a tierra y se puede representar por $\mathbf{v}_{A/T}$ o simplemente por $\mathbf{v}_A$. En este caso se dice que $\mathbf{v}_A$ es la velocidad "absoluta" de *A*.

Ley de composición de las velocidades

Sean las partículas *A* y *B* que se mueven con las velocidades $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$, respectivamente, por las trayectorias mostradas en la Fig. 2-18 (a). Al instante *t* las partículas se encuentran en los puntos *A* y B mostrados en la misma figura ¿Cuál es la velocidad de A con respecto a B?

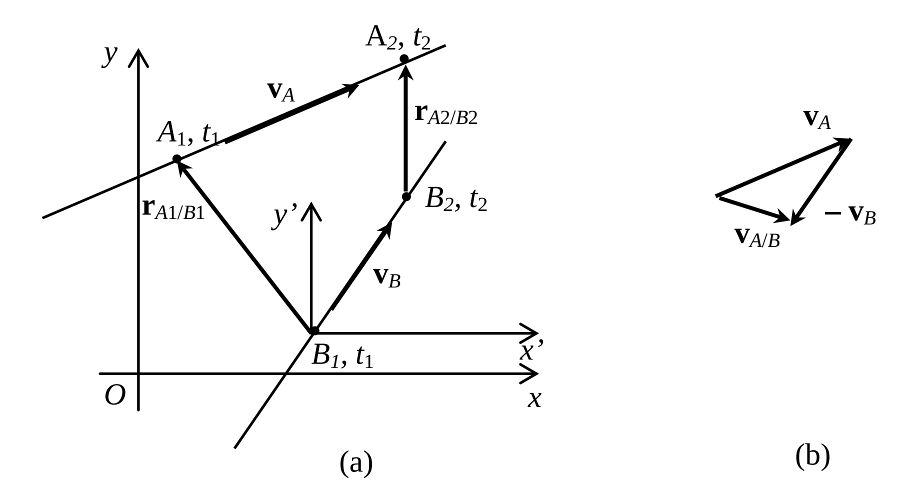


Figura 2-18 Ley de composición de las velocidades

Sea el SR *x'y'* (unido al cuerpo B), en el cual se miden las posiciones y las velocidades de A con respecto a B.

A t_2: $\mathbf{r}_{A_2/B_2} = \mathbf{r}_{A_2} - \mathbf{r}_{B_2}$

A t_1: $\mathbf{r}_{A_1/B_1} = \mathbf{r}_{A_1} - \mathbf{r}_{B_1}$

Para $\Delta t = t_2 - t_1$: $\Delta \mathbf{r}_{A/B} = \Delta \mathbf{r}_A - \Delta \mathbf{r}_B$

Multiplicando por $\frac{1}{\Delta t}$: $\frac{\Delta \mathbf{r}_{A/B}}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{r}_A}{\Delta t} - \frac{\Delta \mathbf{r}_B}{\Delta t}$

En el límite, cuando $\Delta t \to 0$:

$$\mathbf{v}_{A/B} = \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B \qquad (1\text{-}17a)$$

En esta expresión $\mathbf{v}_{A/B}$ es la velocidad de la partícula *A* medida en un sistema de referencia unido al cuerpo *B;* y, $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ son las velocidades de *A* y *B* medidas en el sistema *xy*, unido a tierra.

A esta ecuación se conoce con el nombre de ley de composición de las velocidades o, también, de las velocidades relativas. Vea la Fig. 2-18 (b)

La Ec. (1-17a) se puede expresar de una manera más general para tres partículas en movimiento:

$$\mathbf{v}_{A/B} = \mathbf{v}_{A/C} - \mathbf{v}_{B/C} \qquad (1\text{-}17b)$$

donde $\mathbf{v}_{A/C}$ y $\mathbf{v}_{B/C}$ son las velocidades de A y B medidas en un sistema de referencia unido al cuerpo C. Si la partícula C está fija con respecto a tierra se tendrá que $\mathbf{v}_{A/C} = \mathbf{v}_{A/T} = \mathbf{v}_A$ y que $\mathbf{v}_{B/C} = \mathbf{v}_{B/T} = \mathbf{v}_B$, donde T es tierra.

La ecuación de las velocidades relativas, Ec. (1-17b), es válida para velocidades constantes o variables, siempre que las velocidades estén definidas para el mismo instante.

2.4 ACELERACIÓN

Anteriormente se analizó el cambio de la posición con el tiempo y se definió la velocidad. En esta sección se analizará el cambio de la velocidad con el tiempo y se definirá la aceleración.

La velocidad es un vector tangente a la trayectoria. En general, cuando la trayectoria es rectilínea la velocidad puede cambiar solo en magnitud. Cuando la trayectoria es curvilínea, la velocidad cambia continuamente de dirección y, además, puede cambiar también en magnitud. Por lo tanto, en el caso más general, la velocidad puede cambiar en magnitud y dirección.

Sea una partícula que se mueve por la trayectoria curvilínea de la Fig. 2-19 (a), tal que al instante t_1 tiene una velocidad $\mathbf{v}_1$ y al instante t_2, una velocidad $\mathbf{v}_2$.

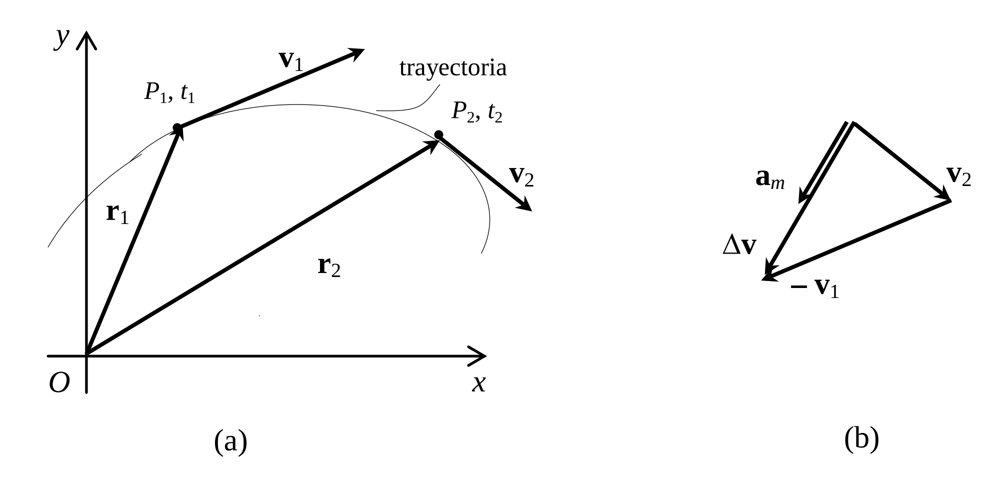


Figura 2-19 Vector de cambio de velocidad $\Delta\mathbf{v}$ y vector aceleración media $\mathbf{a}_m = \Delta\mathbf{v}/\Delta t$ de una partícula, para el intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$

Para el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$, la partícula tiene un cambio de velocidad dado por

$\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$

Aceleración media

Es la relación entre el cambio de la velocidad de la partícula y el intervalo de tiempo empleado en dicho cambio.

$$\mathbf{a}_m = \Delta\mathbf{v} / \Delta t \qquad (1\text{-}18)$$

La unidad de la aceleración en el SI es m/s^2. La dimensión de la aceleración es LT^{-2}.

Como Δt es siempre positivo, la dirección de $\mathbf{a}_m$ será la misma que la del cambio de velocidad, $\Delta\mathbf{v}$**.** Vea la Fig. 2-19 (b).

Aceleración instantánea

La aceleración media informa cómo cambia la velocidad en un intervalo de tiempo Δt, en cambio la aceleración instantánea **a**, que de aquí en adelante se llamará solo aceleración, indica cómo cambia la velocidad en cada instante. Esta cantidad se obtiene al considerar que Δt tiende a cero, con lo cual se define así:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} \qquad (1\text{-}19)$$

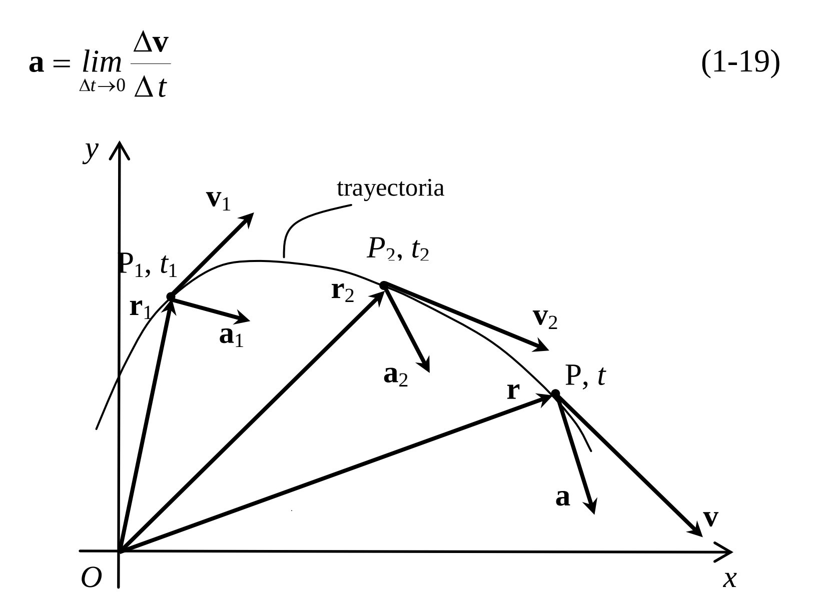


Figura 2-20 Los vectores posición **r**, velocidad **v** y aceleración **a** describen el movimiento de una partícula

En la Fig. 2-20 se representan las tres cantidades físicas **r**, **v** y **a** para los instantes t_1, t_2 y t para un movimiento general de una partícula.

Componentes tangencial y normal de la aceleración

El vector aceleración se puede descomponer en la dirección de la velocidad (*dirección tangencial*) y en la dirección perpendicular a la velocidad (*dirección normal*). La partícula de la Fig. 2-21, que sigue la trayectoria curvilínea señalada, al instante t_1 tiene una velocidad $\mathbf{v_1}$ y al instante t_2, una velocidad $\mathbf{v_2}$. Como se ve, la velocidad ha cambiado simultáneamente tanto en magnitud como en dirección.

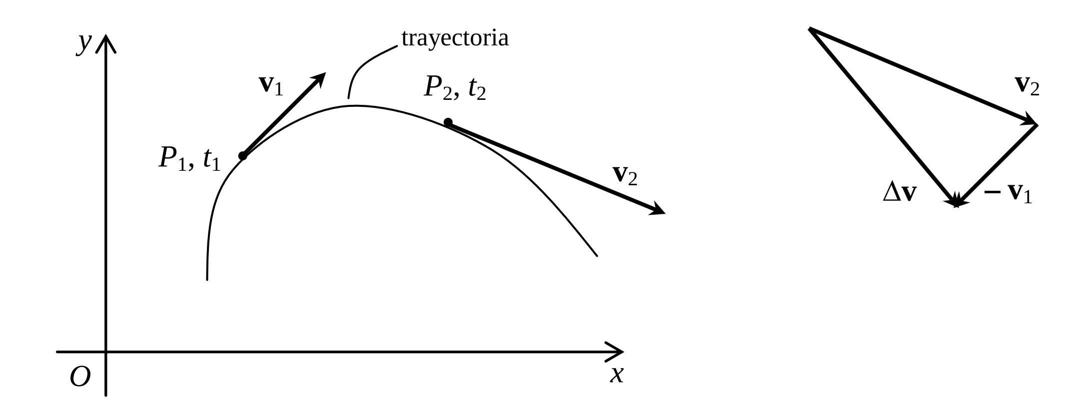


Figura 2-21 La velocidad **v** puede cambiar en magnitud y/o en dirección

Para analizar de manera más simple el movimiento general de la partícula indicada en la Fig. 2-22, en el punto *P*, al instante *t*, se dibujan los ejes orientados tangencial y normal, notados *T* y *N*, de modo que la dirección positiva del eje *T* sea igual a la de la velocidad **v** y la dirección positiva del eje *N* sea hacia la parte cóncava de la trayectoria; los ejes *T* y *N* son perpendiculares.

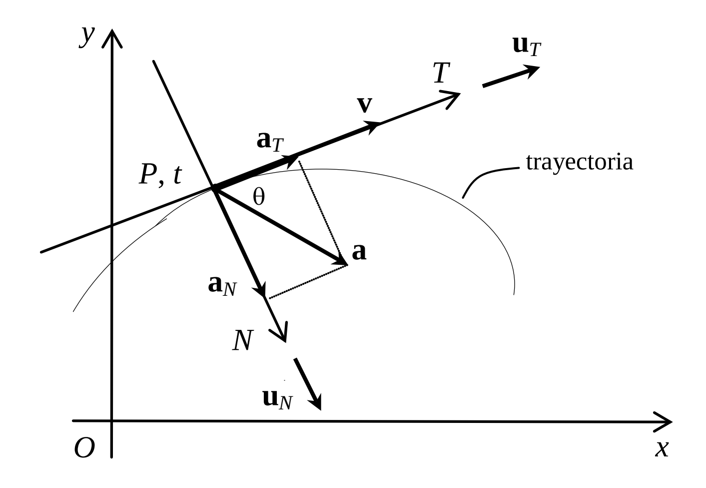


Figura 2-22 Componentes tangencial y normal de la aceleración **a**

Si se aplica el concepto de componentes de un vector, se escriben directamente las siguientes relaciones:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_T = \text{v}\,\mathbf{u}_T \qquad (1\text{-}20a)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_T + \mathbf{a}_N = a_T\,\mathbf{u}_T + a_N\,\mathbf{u}_N \qquad (1\text{-}20b)$$

donde las letras T y N, en los subíndices, señalan las componentes tangencial y normal de la velocidad y la aceleración. Los vectores $\mathbf{u}_T$ y $\mathbf{u}_N$ son los vectores unitarios tangencial y normal, respectivamente, que cambian con el tiempo. La aceleración tangencial es la responsable del cambio de la magnitud de la velocidad (rapidez) en el tiempo. La aceleración normal, por su parte, es responsable del cambio de la dirección de la velocidad en el tiempo.

La velocidad **v**, por ser tangencial a la trayectoria, tiene solamente una componente, la tangencial; además, se tiene que $\mathbf{u}_T = \mathbf{u}_v$. Si θ es el ángulo entre la velocidad **v** y la aceleración **a** se tiene que

$$a_T = a\cos\theta \qquad (1\text{-}21a)$$

$$a_N = a\,\text{sen}\,\theta \qquad (1\text{-}21b)$$

Clasificación del movimiento

En el movimiento rectilíneo, la dirección de la velocidad no cambia por lo que la componente normal de la aceleración es cero. Cuando esta componente es diferente de cero, la trayectoria es curvilínea.

Para cualquier tipo de trayectoria, si la rapidez de la partícula permanece constante ($a_T = 0$) el movimiento es uniforme; cuando la rapidez cambia uniformemente con el tiempo, ($a_T = constante \neq 0$) el movimiento es uniformemente variado; si el cambio no es uniforme con el tiempo ($a_T \neq constante$) el movimiento es variado.

Un movimiento uniformemente variado o variado puede ser *acelerado* si su rapidez aumenta y *retardado*, si su rapidez disminuye; o, lo que es lo mismo, es acelerado cuando los vectores velocidad y aceleración tangencial están en la misma dirección y es retardado, si están en dirección contraria.

Se deja como ejercicio para el lector que indique las condiciones que deben cumplir la aceleración, la aceleración tangencial o la aceleración normal de una partícula que se mueve con movimiento rectilíneo uniforme (MRU), movimiento rectilíneo uniformemente variado (MRUV), movimiento parabólico (MP), movimiento circular uniforme (MCU) y movimiento circular uniformemente variado (MCUV).

2.5 MOVIMIENTO RECTILÍNEO

El movimiento general de una partícula se describe por medio de las siguientes ecuaciones de la posición **r**, la velocidad **v** y la aceleración **a** en función del tiempo:

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}\,(\text{t}) \qquad (1\text{-}22a)$$

$\mathbf{v} = \mathbf{g}(t)$ (1-22b)

$\mathbf{a} = \mathbf{h}(t)$ (1-22c)

En el caso general, en el cual el movimiento es a lo largo de una trayectoria en el espacio, a las ecuaciones vectoriales anteriores les corresponden las siguientes ecuaciones:

$x = f_1(t); \; y = f_2(t); \; z = f_3(t)$ (1-23a)

$v_x = g_1(t); \; v_y = g_2(t); \; v_z = g_3(t)$ (1-23b)

$a_x = h_1(t); \; a_y = h_2(t); \; a_z = h_3(t)$ (1-23c)

Los gráficos de las últimas ecuaciones también son muy útiles para la descripción del movimiento.

Si la partícula se mueve a lo largo del eje *x* las ecuaciones que describen su movimiento son:

$x = f(t)$ (1-23a)

$v_x = g(t)$ (1-23b)

$a_x = h(t)$ (1-23c)

A continuación se analizan los gráficos *x* contra *t*, v_x contra *t* y a_x contra *t*.

Gráfico posición contra tiempo

Para analizar el movimiento de un cuerpo, que se mueve en línea recta, se miden distancias y tiempos. Primero se necesita elegir un sistema de referencia: un eje ligado a la trayectoria rectilínea, por ejemplo el eje *x* y el origen *O* de este eje. Si se miden las distancias desde el origen *O* hasta la posición en la que se encuentra la partícula, en los diferentes instantes, se puede elaborar una tabla de posiciones en función del tiempo. Estos puntos representados en un gráfico posición contra tiempo permiten obtener el gráfico *x* contra *t*, como el de la Fig. 2-23.

La pendiente *m* de la cuerda de la Fig. 2-23 es $(x_3 - x_1) / (t_3 - t_1) = \Delta x / \Delta t$ y representa la velocidad media en ese intervalo de tiempo. La pendiente de la tangente a la curva en el punto señalado para el instante t_1 es m_1 y su valor representa la velocidad en ese instante, que equivale al límite cuando Δt tiende a cero.

En forma general, la pendiente de la cuerda que une dos puntos del gráfico *x* contra *t* representa la velocidad media de la partícula, en el intervalo de tiempo analizado. La pendiente de la tangente a esta curva, en cualquier punto, representa la velocidad instantánea de la partícula en el instante analizado.

Al observar la Fig. 2-23, se puede ver que la pendiente de la cuerda es mayor a la de la tangente a la curva; es decir $m > m_1$, lo que significa que la velocidad media en el intervalo considerado es mayor que la velocidad en el instante inicial de ese intervalo.

Las pendientes de las tangentes a la curva en los instantes t_2 y t_3 dan los valores de las velocidades v_{x2} y v_{x3} de la partícula en esos instantes. Como se ve en el gráfico, la pendiente aumenta con el transcurso del tiempo, en consecuencia la velocidad aumenta.

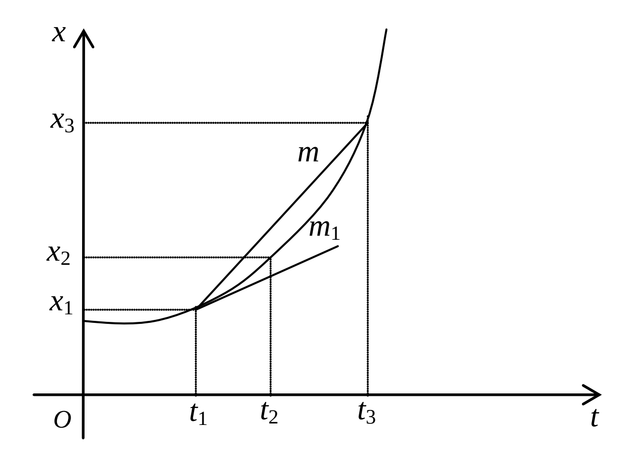


Figura 2-23 La velocidad media v_{mx} como pendiente de la cuerda para un intervalo Δt y la velocidad instantánea v_x como pendiente de la tangente al instante t en el gráfico x contra t

En el intervalo de t_1 a t_3 la pendiente de la tangente y, por lo tanto, la velocidad v_x cambia con el tiempo. Sin embargo, la velocidad media v_{mx} para el mismo intervalo es única, y representa justamente un valor medio. Obsérvese que en algún instante entre t_1 y t_3 va a existir una recta tangente paralela a la cuerda y, en consecuencia, solo en ese instante la velocidad v_x coincide con la velocidad media v_{mx}.

Cuando el gráfico x contra t es una línea recta, la pendiente de la cuerda para cualquier intervalo de tiempo sería la misma, como también lo es la pendiente de la tangente a la curva para cualquier instante; esto significa que la velocidad v_x es igual a la velocidad media v_{mx}, es decir, que la velocidad v_x es constante.

Gráfico velocidad contra tiempo

Con las pendientes de las tangentes trazadas a diferentes instantes en un gráfico x contra t, se puede hacer una tabla de la velocidad en función del tiempo. Estos puntos representados en un gráfico v_x contra t, permiten obtener una curva como la indicada en la Fig. 2-24.

La pendiente m de la cuerda de la Fig. 2-24 es $\Delta v_x /\Delta t$ y representa la aceleración media de la partícula para el intervalo de tiempo $\Delta t = t_3 - t_1$. La pendiente de la tangente a la curva en el instante t_1 es m_1, y su valor es el límite cuando Δt tiende a cero en la relación $\Delta v_x /\Delta t$; dicho valor es la aceleración a_x que tiene el cuerpo al instante t_1.

Al observar la Fig. 2-24, se ve que la pendiente de la tangente a la curva es mayor que la pendiente de la cuerda; es decir $m_1 > m$, lo que significa que la aceleración al instante inicial del intervalo es mayor que la aceleración media en el intervalo considerado.

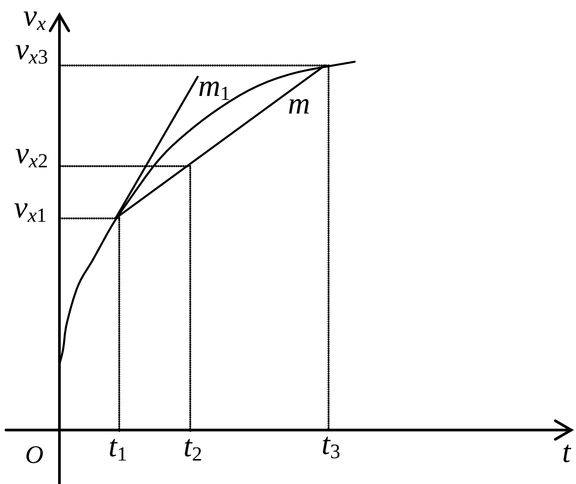


Figura 2-24 La aceleración media a_{mx} como pendiente de la cuerda para un intervalo Δt y la aceleración instantánea v_x como pendiente de la tangente al instante t, en el gráfico x contra t

Las pendientes de las tangentes a la curva en los instantes t_2 y t_3, definen las aceleraciones de la partícula, en esos instantes. Como se ve en el gráfico la pendiente disminuye con el transcurso del tiempo, en consecuencia la aceleración disminuye.

En el intervalo de t_1 *a* t_3 la pendiente de la tangente y, por lo tanto, la aceleración a_x cambia con el tiempo. Sin embargo la aceleración media a_{mx} para el mismo intervalo es única y representa justamente un valor medio. Obsérvese que en algún instante entre t_1 y t_3 va a existir una recta tangente paralela a la cuerda y en consecuencia, solo en ese instante la aceleración a_x coincide con la aceleración a_{mx}.

En el caso en el cual el gráfico v_x contra t es una línea recta, la pendiente de la cuerda para cualquier intervalo de tiempo sería la misma como también lo es la pendiente de la tangente a la curva para cualquier instante; esto significa que la aceleración a_x es igual a la aceleración media a_{mx}, es decir, que la aceleración a_x es constante.

Además, en este gráfico el área comprendida entre la curva, el eje del tiempo y las rectas $t = t_1$ y $t = t_2$ representa el desplazamiento que realiza la partícula en el intervalo de tiempo considerado. Las áreas que están sobre el eje del tiempo representan desplazamientos positivos y las que están bajo el eje, desplazamientos negativos.

Para encontrar la distancia recorrida por la partícula sobre la trayectoria en un Δt, se deben sumar las magnitudes de los desplazamientos parciales.

Cuando el gráfico v_x contra t es una línea recta, el área bajo la recta se calcula con el empleo de fórmulas geométricas; pero si el gráfico es una curva como la de la Fig. 2-25, el área deberá ser dividida en varios rectángulos, cuyas bases sean iguales a Δt. Mientras el área se divida en un mayor número de rectángulos, el cálculo del área tendrá menos error.

Para calcular el área exacta con este procedimiento, el número de rectángulos deberá ser infinito. Esto se lograría cuando Δt tiende a cero, con lo que se tendría que sumar un infinito número de áreas. Mediante el cálculo integral se podrá encontrar el área en un solo paso, sin estos inconvenientes.

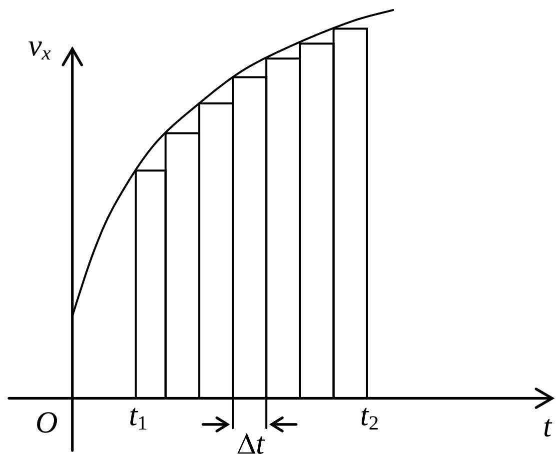


Figura 2-25 El área bajo la curva v_x contra t para un intervalo Δt es igual al desplazamiento Δx para el intervalo

Gráfico aceleración contra tiempo

Con las pendientes de las tangentes trazadas a diferentes instantes en un gráfico v_x contra t, se puede hacer una tabla de la aceleración en función del tiempo. Estos puntos representados en un gráfico a_x contra t, permiten obtener una curva como la indicada en la Fig. 2-26.

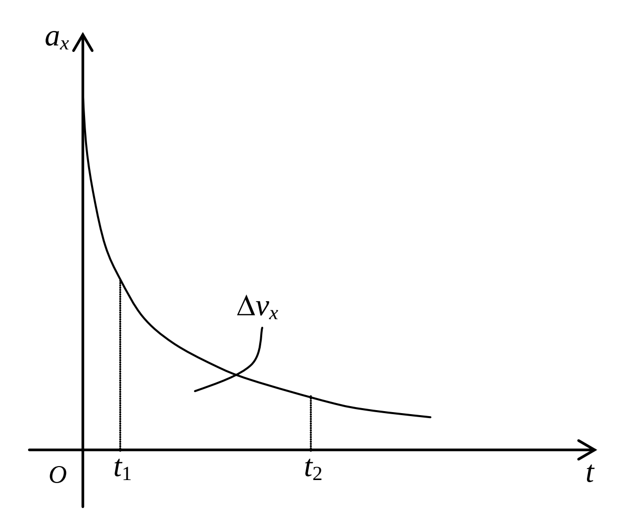


Figura 2-26 El área bajo la curva a_x contra t para un intervalo Δt es igual al cambio de velocidad Δv_x para el intervalo

La pendiente de la tangente a la curva en este gráfico no tiene un significado físico. Pero el área comprendida entre la curva a_x contra t el eje del tiempo y las rectas $t = t_1$ y $t = t_2$

representa el cambio de la velocidad Δv_x que experimenta la partícula en el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$.

A partir del gráfico x contra t del movimiento de una partícula, siguiendo el procedimiento de calcular pendientes de rectas tangentes, se pueden hacer los gráficos v_x contra t y a_x contra t que en conjunto describen completamente el movimiento.

De manera similar, si se conoce el gráfico a_x contra t y los valores de la velocidad v_x y la posición x a cierto instante y siguiendo el procedimiento de calcular áreas bajo las curvas se pueden hacer los otros dos gráficos v_x contra t y x contra t.

Si a la trayectoria rectilínea de la partícula se ligan los ejes y ó z se tendrían los gráficos y contra t ó z contra t, los gráficos v_y contra t ó v_z contra t, y también los gráficos a_y contra t ó a_z contra t.

Si la partícula se mueve en un plano, por ejemplo el plano xy, por una trayectoria rectilínea o curvilínea, entonces se tienen dos gráficos para la posición (x contra t y y contra t), dos para la velocidad (v_x contra t y v_y contra t), y dos para la aceleración (a_x contra t y a_y contra t).

Movimiento rectilíneo uniformemente variado

Es un movimiento de las siguientes características:

a) trayectoria rectilínea $\Rightarrow$ $\mathbf{u}_v$ = **cte** $\Rightarrow \mathbf{a}_N = \mathbf{0}$

b) la magnitud de la velocidad cambia uniformemente $\Rightarrow$ $\mathbf{a}_T$ = cte $\neq \mathbf{0}$

$\rightarrow$ **v** $\neq$ **cte**, **a** = **cte**

Ahora se estudiará el caso de una partícula que se mueve a lo largo del eje x con aceleración $a_x = cte$, y que al tiempo inicial t_0 tiene una posición inicial x_0 y una velocidad inicial v_{x0}. El tiempo inicial t_0 puede ser cualquiera, pero generalmente es cero.

El gráfico a_x contra t será uno como el mostrado en la Fig. 2-27.

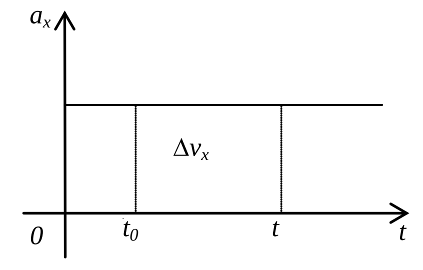


Figura 2-27 El área bajo la curva a_x contra t en el MRUV ($a_x = cte$) es igual a $\Delta v_x = a_x \Delta t$

El área bajo la curva a_x contra t, desde el tiempo inicial t_0 hasta un tiempo cualquiera t, viene dada por

$$\Delta v_x = a_x \, \Delta t$$

De donde:

$$v_{xt} - v_{x0} = a_x \, (t - t_0)$$

donde v_{xt} es la velocidad al tiempo t. Finalmente se tiene:

$$v_{xt} = v_{x0} + a_x \, (t - t_0) \qquad (1\text{-}23b)$$

que es la ecuación de la velocidad v_x en función del tiempo t para el MRUV.

El gráfico de v_x contra t es una recta como la de la Fig. 2-28.

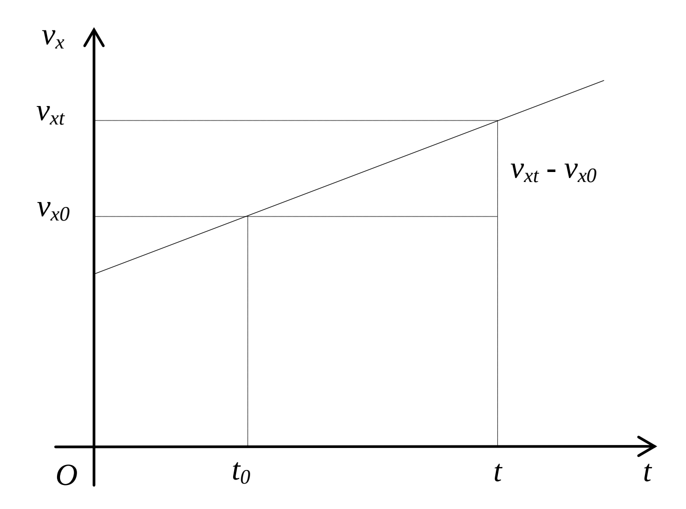


Figura 2-28 El área bajo la curva v_x contra t en el MRUV ($a_x = cte$) es igual a la suma de las áreas de un rectángulo y un triángulo: $\Delta x = v_{x0}\ (t - t_0) + ½\ (v_{xt} - v_{x0})\ (t - t_0)$

El área bajo la curva para el intervalo $\Delta t = t - t_0$ corresponde, en este caso, al área de un trapecio que se lo puede descomponer en un rectángulo de área $v_{x0}\ (t - t_0)$ y un triángulo de área (1/2) $(v_{xt} - v_{x0})\ (t - t_0)$. Por otro lado, el área bajo la curva es igual al desplazamiento $\Delta x = x_t - x_0$. Así pues, se puede escribir:

$$\Delta x = x_t - x_0 = v_{x0}\ (t - t_0) + ½\ (v_{xt} - v_{x0})\ (t - t_0)$$

Además, si se reemplaza

$$v_{xt} - v_{x0} = a_x (t - t_0)$$

en la ecuación anterior y, después de despejar x_t, se obtiene la ecuación de la posición x en función del tiempo t:

$$x_t = x_0 + v_{x0}(t - t_0) + \tfrac{1}{2} a_x (t - t_0)^2 \qquad \text{(1-23a)}$$

Como ejercicio, el lector puede demostrar que para una partícula con aceleración a_x constante la ecuación que se obtiene de despejar ($t - t_0$) de la ecuación de la posición y reemplazar en la ecuación de la velocidad es:

$$v_x^2 = v_{x0}^2 + 2\, a_x\, (x - x_0) \qquad \text{(1-23d)}$$

Si el tiempo inicial t_0 vale cero las ecuaciones del MRUV son:

$$x = \mathrm{f}\,(t): \quad x_t = x_0 + v_{x0}\, t + ½\, a_x\, t^2 \qquad \text{(1-23a)}$$

$$v_x = \mathrm{g}\,(t): \quad v_{xt} = v_{x0} + a_x\, t \qquad \text{(1-23b)}$$

$$a_x = \mathrm{h}\,(t): \quad a_x = cte \qquad \text{(1-23c)}$$

$$v_x = \mathrm{l}\,(\mathrm{x}): \quad v_x^2 = v_{x0}^2 + 2\, a_x (x - x_0) \qquad \text{(1-23d)}$$

Las ecuaciones vectoriales del MRUV son:

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}\,(t): \quad \mathbf{r}_t = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0\, t + ½\, \mathbf{a}\, t^2 \qquad \text{(1-22a)}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{g}\,(t): \quad \mathbf{v}_t = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}\, t \qquad \text{(1-22b)}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{h}\,(t): \quad \mathbf{a} = \mathbf{cte} \qquad \text{(1-22c)}$$

Un ejemplo de gráficos x, v_x y a_x contra t para el MRUV se indica en la Fig. 2-29.

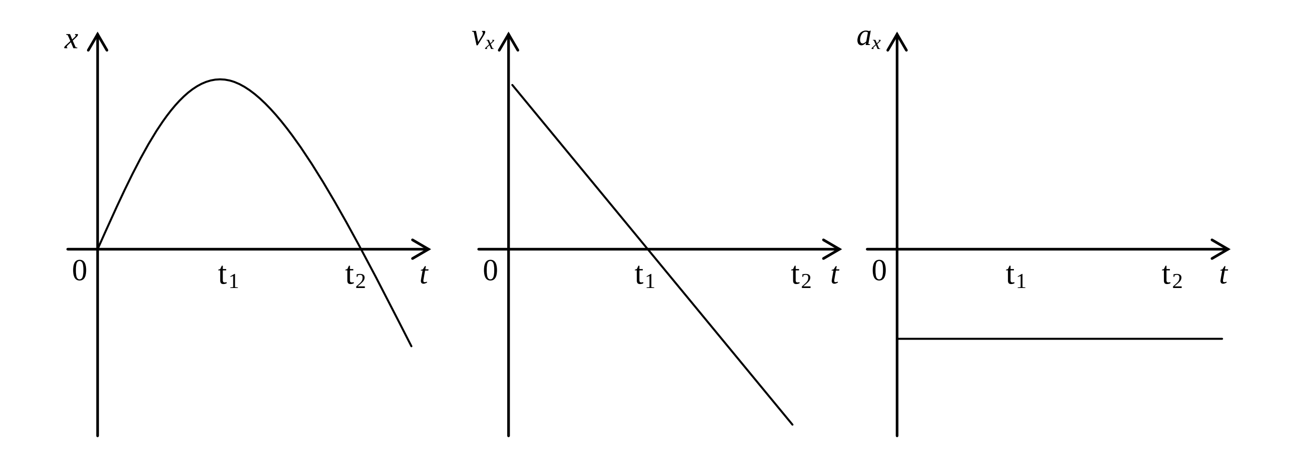


Figura 2-29 Un ejemplo de los gráficos x, v_x y a_x contra t para el MRUV

Movimiento rectilíneo uniforme

Es un movimiento de las siguientes características:

(a) trayectoria rectilínea $\rightarrow$ $\mathbf{u_v} = \mathbf{cte} \Rightarrow \mathbf{a}_N = \mathbf{0}$

v = **cte**, **a** = **0**

(b) la magnitud de la velocidad constante $\Rightarrow$ $\mathbf{a}_T = \mathbf{0}$

En el caso de una partícula que se mueve a lo largo del eje x con velocidad $v_x = cte$, y que al tiempo inicial t_0 tiene una posición inicial x_0 sus ecuaciones se las obtiene como caso particular del MRUV cuando $a_x = 0$, y son:

$$x = \mathrm{f}(t): \quad x_t = x_0 + v_x\, t \qquad (1\text{-}23a)$$

$$v_x = \mathrm{g}(t): \quad v_{xt} = cte \qquad (1\text{-}23b)$$

$$a_x = \mathrm{h}(t): \quad a_x = 0 \qquad (1\text{-}23c)$$

Las ecuaciones vectoriales del MRU son:

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}(t): \quad \mathbf{r}_t = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}\, t \qquad (1\text{-}22a)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{g}(t): \quad \mathbf{v} = \mathbf{cte} \qquad (1\text{-}22b)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{h}(t): \quad \mathbf{a} = \mathbf{0} \qquad (1\text{-}22c)$$

Un ejemplo de los gráficos x, v_x y a_x contra t del MRU se muestra en la Fig. 2-30

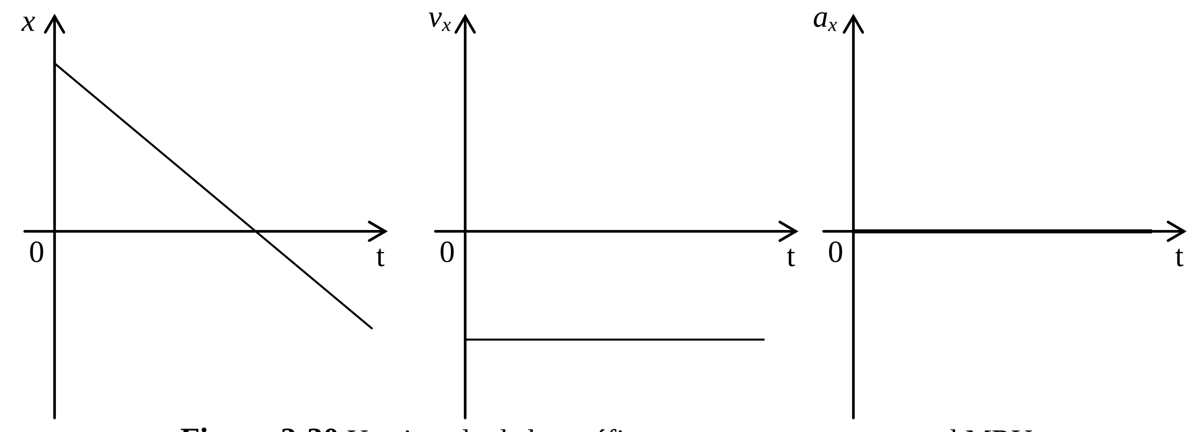


Figura 2-30 Un ejemplo de los gráficos x, v_x y a_x contra t para el MRU

Caída libre

Es el movimiento que describe un cuerpo, cuando está sometido exclusivamente a la aceleración de la gravedad (es decir la resistencia del aire es despreciable), la misma que, cuando se trabaja con alturas relativamente pequeñas comparadas con el radio de la tierra, se puede considerar aproximadamente constante e igual a 9,8 m/s².

Cuando se trata de un movimiento vertical (a lo largo del eje y) y la aceleración constante, se pueden utilizar exactamente las mismas ecuaciones que se desarrollaron anteriormente para movimientos con aceleración constante, o sea:

$$y = \mathrm{f}(t): \quad y_t = y_0 + v_{y0}\, t + \tfrac{1}{2}\, a_y\, t^2 \qquad (1\text{-}23a)$$

$$v_y = \mathrm{g}(t): \quad v_{yt} = v_{y0} + a_y\, t \qquad (1\text{-}23b)$$

a_y = h (t): a_y = – 9,8 m/s² ≈ – 10 m/s² (1-23c)

v_y = l (y): $v_y^2 = v_{y0}^2 + 2\, a_y\, \Delta y$ (1-23d)

En este tipo de movimiento se acostumbra definir algunas otras variables específicas que son:

- *Tiempo de subida* (t_s): es el tiempo que demora un cuerpo que se lanza verticalmente hacia arriba, en llegar al punto más alto. Para calcular este tiempo no es necesario desarrollar otra fórmula, basta considerar que para que el cuerpo llegue al punto más alto $v_y = 0$.
- *Altura máxima* (y_m): es la máxima altura hasta la que puede llegar un cuerpo que es lanzado verticalmente hacia arriba. Para calcular esta altura basta considerar también que para que llegue al punto más alto es necesario que su $v_y = 0$.
- *Tiempo de vuelo* (t_v): es el tiempo que permanece el cuerpo en movimiento. Desde que es lanzado, hasta cuando regresa al nivel del lanzamiento. Este tiempo no siempre es igual al doble del tiempo de subida

2.6 MOVIMIENTO PARABÓLICO

Para que una partícula describa un movimiento parabólico se deben cumplir las siguientes condiciones:

1. Que la partícula se mueva en una región donde el vector aceleración sea constante, y
2. Que la partícula tenga una velocidad inicial diferente de cero y que no forme ni 0° ni 180° con la aceleración antes mencionada.

Así pues, el movimiento de una partícula con velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ y sujeta a una aceleración constante **a** se describe con las siguientes ecuaciones:

$\mathbf{r} = \mathbf{f}(t)$: $\mathbf{r}_t = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0\, t + ½\, \mathbf{a}\, t^2$ (1-22a)

$\mathbf{v} = \mathbf{g}$ (t): $\mathbf{v}_\mathrm{t} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}\, t$ (1-22b)

Un caso particular de movimiento parabólico es el tiro de proyectiles, en el cual se puede tomar al vector aceleración de la gravedad **g** como si fuera constante, siempre y cuando a) el proyectil no alcance alturas demasiado grandes, pues, como se sabe, el valor de *g* disminuye con la altura, b) el proyectil no recorra distancias horizontales muy extensas, pues de lo contrario, debido a la curvatura de la superficie terrestre, la dirección de **g** ya no permanece constante.

Bajo los supuestos anteriores, y si se desprecia el rozamiento con el aire, el movimiento de un proyectil puede ser analizado como la superposición de dos movimientos: un movimiento horizontal uniforme (en la dirección del eje *x*), y un movimiento vertical uniformemente variado (en la dirección del eje *y*), retardado mientras sube el proyectil y acelerado mientras baja. Las ecuaciones correspondientes son:

x = f (t): $\mathrm{x} = v_{x0}\, t$, $v_{x0} = v_0 \cos \theta_0$ (1-23a)

y = g (t): $y = v_{y0}\, t + ½\, g\, t^2$, $v_{y0} = v_0$ sen θ_0 (1-23a)

$v_y = h\ (t)$: $v_y = v_{y0} + g\ t$ (1-23b)

$v_y = l\ (y)$: $v_y^{\,2} = v_{y0}^{\,2} + 2\ g\ \Delta y$ (1-23d)

El tiro de proyectiles es un movimiento en caída libre, pues solo actúa la aceleración de la gravedad en la dirección vertical (eje *y*), como se indica en la Fig. 2-31.

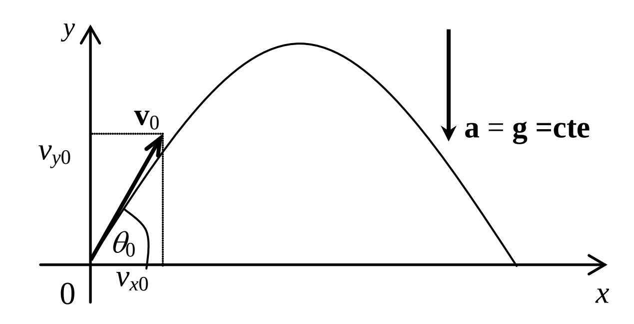


Figura 2-31 Movimiento parabólico

Si utiliza las expresiones anotadas, el lector puede calcular fácilmente las siguientes cantidades:

- Altura máxima (y_m)
- Tiempo de subida (t_s)
- Tiempo de vuelo (t_v)
- *Alcance* (x): distancia que recorre el proyectil en el tiempo de vuelo,
- *Alcance máximo* (x_m): máxima distancia horizontal que puede recorrer el proyectil, disparado con un ángulo de tiro de 45° sobre la horizontal,
- *Ecuación de la trayectoria*: Es la ecuación y = f (x), se obtiene al combinar las ecuaciones x = f (t) e y = f (t), en las cuales $x_0 = y_0 = 0$ si se coloca el origen de coordenadas en el punto de lanzamiento, de manera que se elimina el parámetro *t*.

2.7 MOVIMIENTOS ANGULAR Y CIRCULAR

Descripción del movimiento angular de un segmento de recta

Se estudiará el movimiento de un segmento de recta sobre un plano dado. La posición del segmento de recta viene dada por el ángulo que forma con alguna recta de referencia y que se llamará posición angular. Por esa razón se dirá que el segmento de recta describe un movimiento angular si su posición angular cambia con el tiempo.

Las siguientes cantidades describen el movimiento angular de un segmento de recta.
posición angular a un instante t, θ (rad),
desplazamiento angular para un intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta\theta$ (rad),
velocidad angular media para una intervalo Δt, $\omega_m = \Delta\theta / \Delta t$ (rad/s),
velocidad angular instantánea, $\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$ (rad/s),
cambio de velocidad angular para un intervalo Δt, $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, (rad/s),
aceleración angular media para un intervalo Δt, $\alpha_m = \Delta\omega / \Delta t$ (rad/s^2) y

aceleración angular instantánea, $\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$ (rad/s^2).

El vector posición **r** de una partícula que describe un movimiento circular (MC) puede ser visto como un segmento de recta que describe un movimiento angular que puede ser descrito con las variables angulares θ, ω y α, como se muestra en la Fig. 2-32.

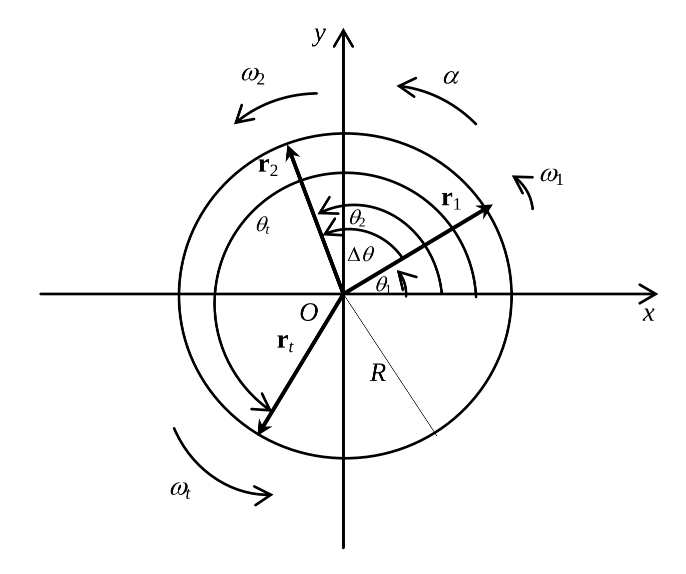


Figura 2-32 El MC de una partícula descrito con las variables angulares θ, ω y α

La posición de un punto en coordenadas polares viene dada por la distancia *r* del punto al origen del plano *xy* y el ángulo θ que forma el segmento que va desde el origen *O* al punto con el eje *x*.

En un movimiento general *r* y θ cambian con el tiempo. En el MC, y si el origen de coordenadas *O* se hace coincidir con el centro de la trayectoria, *r* es constante e igual al radio *R* de la misma. En ese caso, la descripción del movimiento se restringe a la ecuación $\theta = f(t)$ y las ecuaciones vinculadas con ella: $\omega = g(t)$ y $\alpha = h(t)$.

El significado de los signos de las variables θ, ω y α es el siguiente:

$\theta > 0$: θ se mide en sentido contrario al avance de las manecillas del reloj,
$\theta < 0$: θ se mide en el sentido del avance de las manecillas del reloj,
$\omega > 0$: la partícula gira en sentido contrario al avance de las manecillas del reloj,
$\omega < 0$: la partícula gira en el sentido del avance de las manecillas del reloj,
$\alpha > 0$ y $\omega > 0$, o $\alpha < 0$ y $\omega < 0$: la partícula tiene movimiento acelerado y
$\alpha > 0$ y $\omega < 0$, o $\alpha < 0$ y $\omega > 0$: la partícula tiene movimiento retardado.

Clasificación del MC de una partícula según el valor de su aceleración angular α

- $\alpha = cte$:
  - $\alpha = 0$: MCU
  - α diferente de *0*: MCUV
- α diferente de *cte*: MCV

Ecuaciones con las variables angulares para el MCUV de una partícula

La deducción de las ecuaciones con las variables angulares para el MCUV de una partícula es similar a la que se hizo para el MRUV.

$$\theta = \mathrm{f}\,(t): \quad \theta_t = \theta_0 + \omega_0\, t + 1/2\alpha\, t^2 \qquad (1\text{-}23a)$$

$$\omega = \mathrm{g}\,(t): \quad \omega_t = \omega_0 + \alpha\, t \qquad (1\text{-}23b)$$

$$\alpha = \mathrm{h}\,(t): \quad \alpha = cte \qquad (1\text{-}23c)$$

$$\omega = \mathrm{l}\,(\theta): \quad \omega^2 = \omega_0{}^2 + 2\alpha\,\Delta\theta \qquad (1\text{–}23d)$$

En el caso particular del MCU, la aceleración angular es cero por lo que las ecuaciones con variables angulares son:

$$\theta = f(t): \theta_t = \theta_0 + \omega\, t \qquad (1\text{-}23a)$$

$$\omega = g(t): \omega = cte \qquad (1\text{-}23b)$$

$$\alpha = h(t): \alpha = 0 \qquad (1\text{-}23c)$$

Los gráficos de las ecuaciones angulares y los significados de las pendientes y las áreas bajo las curvas, en los casos pertinentes, son análogos a los del movimiento rectilíneo.

La aceleración a en el MCU

La partícula mostrada en la Fig. 2-33 describe un MCU. La partícula se encuentra en el punto P_1, al tiempo t_1, con una velocidad $\mathbf{v}_1$, y al instante t_2 en el punto P_2, con una velocidad $\mathbf{v}_2$, como se indica en la Fig. 2-33. Si se quiere encontrar la aceleración instantánea **a**, al tiempo t_1 (en el punto P_1), se partirá de la aceleración media $\mathbf{a}_m = \Delta\mathbf{v}/\Delta t$, y se considerará que Δt tiende a cero y, en el límite, se obtendrá la aceleración instantánea.

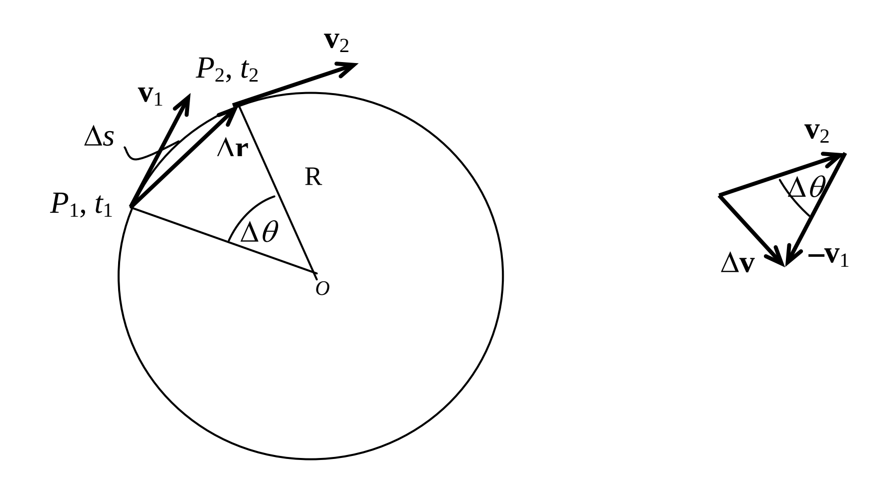


Figura 2-33 La aceleración **a** en el MCU está dirigida hacia el centro de la trayectoria: **a** = $\mathbf{a}_N$
Se demostrará que la aceleración **a** en el MCU tiene solo la componente normal $\mathbf{a}_N$; es decir que, **a** = $\mathbf{a}_N$. Lo cual es equivalente a demostrar que el vector **a** está dirigido hacia el centro de la circunferencia y como en el MC el eje normal N coincide siempre con un radio, se tendrá que **a** = $\mathbf{a}_N$. Además, se hallará la magnitud de la aceleración $\mathbf{a}_N$.

Para determinar esta magnitud, como ya se dijo, si se considera un $\Delta t = t_2 - t_1$ pequeño, el punto P_2 se acerca al punto P_1 y el arco Δs se aproxima a la cuerda $P_1P_2 = |\Delta \mathbf{r}|$. Es decir, si $\Delta t \to 0$, $\Delta s \approx |\Delta \mathbf{r}|$. Se puede ver que en la Fig. 2-33 se forman dos triángulos isósceles semejantes, por lo cual se plantea que:

$$|\Delta \mathbf{r}| / R = \Delta v / v,$$

de donde

$$\Delta v = (v/R)\, |\Delta \mathbf{r}|$$

Por la definición de aceleración media se sabe que $a_m = \Delta v / \Delta t$ y si en ésta se reemplaza la igualdad anterior se tiene:

$$a_m = \frac{v}{R}\,\frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t}$$

Debido a que la aceleración instantánea es el límite cuando $\Delta t \to 0$ de la aceleración media, se tiene:

$$a_N = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v}{R}\,\frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t} = \frac{v}{R} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t} = \frac{v^2}{R}$$

Por lo tanto,

$$a_N = \frac{v^2}{R} \qquad (1\text{-}24)$$

Ahora se verá qué dirección tiene esta aceleración. Cuando Δt tiende a cero, el punto P_2 se aproxima mucho al punto P_1 por lo que $\Delta\theta$ también tenderá a cero, bajo estas condiciones y según se observa en la Fig. 2-33 se puede concluir que Δ**v** y por ende **a** será perpendicular a **v**, en el punto P_1. Por consiguiente **a** está dirigida hacia el centro de la circunferencia y como en el movimiento circular el eje normal coincide siempre con el radio se tiene que **a = $\mathbf{a}_N$**.

A pesar de que esta deducción fue hecha para el MCU, la expresión $a_N = v^2/R$ es válida para cualquier movimiento circular.

Vectores velocidad y aceleración angulares

Las cantidades velocidad y aceleración angulares tienen una dirección de acuerdo con el sentido del avance de las manecillas del reloj o contrario al avance de las manecillas del reloj,

con lo cual se puede hablar de los vectores velocidad angular **ω** y aceleración angular **α**, tal como se muestra en la Fig. 2-34.

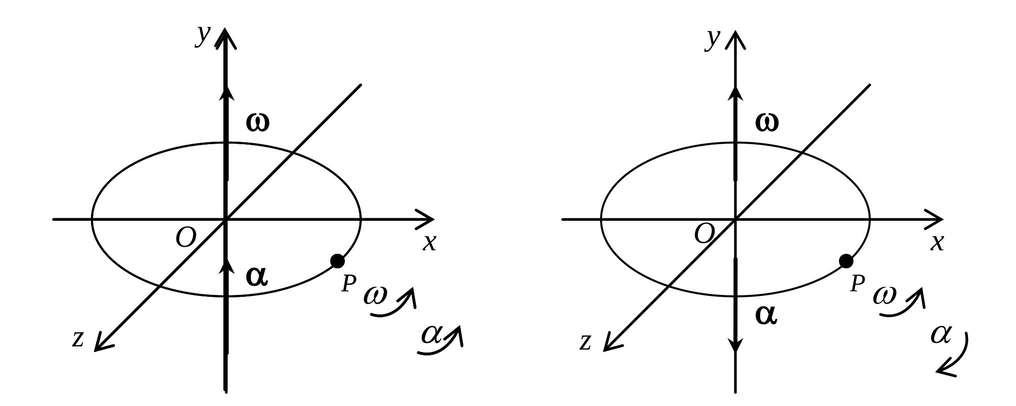


Figura 2-34 Vectores velocidad angular **ω** y aceleración angular **α**

Relación entre las variables lineales y angulares

Si los dos tipos de variables, lineales y angulares, describen el MC de la misma partícula, tal como se ve en la Fig. 2-35, entonces, debe haber una relación entre ellas.

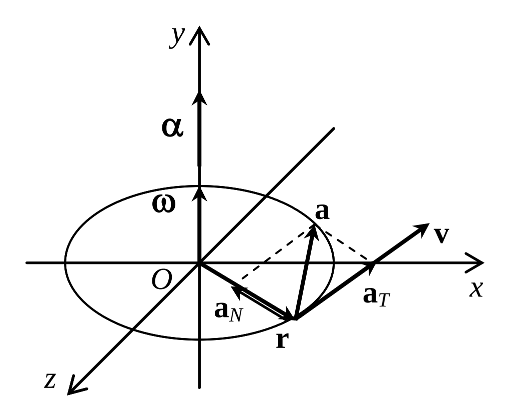


Figura 2-35 El MC de una partícula descrito con las variables **r**, **v** y **a**, y las variables angulares θ, **ω** y **α**

Si la posición angular θ está expresada en radianes se puede escribir la siguiente relación fundamental:

$$s = \theta R \qquad (1\text{-}25)$$

donde s es el arco subtendido por el ángulo θ. A partir de esta relación se obtienen las siguientes relaciones:

$\Delta s = \Delta\theta\ R, \qquad \Delta s \approx |\Delta \mathbf{r}|$ si $\Delta t \to 0, \qquad |\Delta \mathbf{r}| = \Delta\theta\ R$

$$\frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} R$$

En el límite, cuando Δt tiende a cero:

$$v = \omega R \qquad \text{(1-26a)}$$

De manera similar:

$$\Delta v = \Delta\omega R; \qquad \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} R$$

En el límite, cuando Δt tiende a cero:

$$a_T = \alpha R \qquad \text{(1-27a)}$$

Además, para la aceleración normal se puede escribir:

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = \omega\ v \qquad \text{(1-28a)}$$

Así, pues, la relación en forma escalar entre las variables angulares y las lineales que describen el MC de una partícula viene dada por las ecuaciones:

$$s = \theta R \qquad \text{(1-25)}$$

$$v = \omega R \qquad \text{(1-26a)}$$

$$a_T = \alpha R \qquad \text{(1-27a)}$$

$$a_N = \omega^2 R \qquad \text{(1-28a)}$$

$$a = (\alpha^2 + \omega^4)^{1/2} R \qquad \text{(1-29a)}$$

donde todas las cantidades son para un instante dado.

Se puede ver en la Fig. 2-35 que las siguientes expresiones relacionan en forma vectorial las variables lineales **r**, **v**, $\mathbf{a}_T$, $\mathbf{a}_N$ y **a** con las variables angulares $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \qquad \text{(1-26b)}$$

$$\mathbf{a}_T = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} \qquad \text{(1-27b)}$$

$$\mathbf{a}_N = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \qquad \text{(1-28b)}$$

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \qquad \text{(1-29b)}$$

PROBLEMAS

2.1 VECTORES

1. Dado el vector **A** = 4 **i** + 5 **j** – 2 **k** m y conociendo que la magnitud de **B** es 10 m y que sus ángulos directores son α = 60°, β > 90° y γ = 120°, determine el ángulo que forma el vector **A – B** con el vector **B**.

$$\cos\beta = -\sqrt{1-\cos^2 60^0 - \cos^2 120^0}$$

$$\cos\beta = -\ 0.707$$

(el signo – se debe a que el ángulo β > 90°)

B = *B* (cos α **i** + cos β **j** + cos γ **k**)

B = 10 (cos 60° **i** – 0.707 **j** + cos 120° **k**),

es decir: **B** = 5 **i** – 7.07 **j** – 5 **k** m

Si **C** = **A** – **B**

C = 4 **i** + 5 **j** – 2 **k** – 5 **i** + 7.07 **j** + 5 **k**

C = – **i** + 12.07 **j** + 3 **k** m,

y $C = \sqrt{(1)^2 + (12.07)^2 + (3)^2} = \sqrt{155.69}$ m

entonces: $\theta = \cos^{-1}$ [(**C** • **B**) / (*C B*)]

$\theta = \cos^{-1}$ [(–5 – 85.33 – 15) / (10) (12.48)]

θ = 147.58°

2. Dados los vectores **A** = –2 **i** + 3 **j** – **k**; **B** = **i** – 3 **j** + **k** y **C** = 3 **i** + 2 **j** – 2 **k,** determine el vector unitario del vector **P** = **A** + **B** – **C**

P = – 2 **i** + 3 **j** – **k** + **i** – 3 **j** + **k** – 3 **i** – 2 **j** + 2 **k**

P = – 4 **i** – 2 **j** + 2 **k**,

y $P = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{24}$,

entonces: $\mathbf{u}_P$ = **P**/*P*

$\mathbf{u}_P = (-4\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}) / \sqrt{24}$

$\mathbf{u}_P = -0.82\,\mathbf{i} - 0.41\,\mathbf{j} + 0.41\,\mathbf{k}$

3. Dados los vectores **A** = 2 **i** + 3 **j** – **k** m; **B** = 4 **i** – **j** + 5 **k** m y **C** = – 4 **i** – 6 **j** + 2 **k** m.
a) ¿Qué vectores son perpendiculares? Justifique analíticamente.
b) ¿Qué vectores son paralelos? Justifique analíticamente.

a) $\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = (2\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} - \mathbf{k}) \bullet (4\,\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\,\mathbf{k})$

$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = 8 - 3 - 5 = 0$

Por lo tanto **A** y **B** son perpendiculares ente sí.

$\mathbf{A} \bullet \mathbf{C} = (2\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} - \mathbf{k}) \bullet (-4\,\mathbf{i} - 6\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k})$

$\mathbf{A} \bullet \mathbf{C} = -8 - 18 - 2 = -28$,

es decir, **A** y **C** no son perpendiculares entre sí.

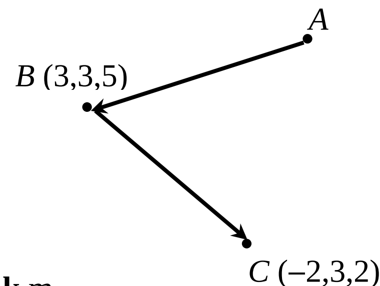
$\mathbf{B} \bullet \mathbf{C} = (4\,\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\,\mathbf{k}) \bullet (-4\,\mathbf{i} - 6\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k})$

$\mathbf{B} \bullet \mathbf{C} = -16 + 6 + 10 = 0$,

por lo tanto, **B** es perpendicular a **C**.

b) Si **A** es perpendicular a **B** y **C** es perpendicular a **B**, entonces **A** y **C** son paralelos entre sí.

4. Dados los puntos *B* (3, 3, 5) m y *C* (–2, 3, 2) m y el vector posición de *B* con respecto a *A* que es 4 **i** – 2 **k** m, determine un vector **M** de magnitud 10 m y perpendicular al plano que contiene a los puntos *A*, *B* y *C*.



$\mathbf{AB} = \mathbf{r}_{B/A} = 4\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{k}$ m

$\mathbf{BC} = (-2 - 3)\,\mathbf{i} + (3 - 3)\,\mathbf{j} + (2 - 5)\,\mathbf{k}$

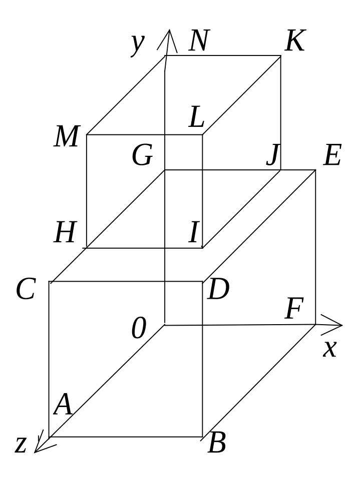
$\mathbf{BC} = -5\,\mathbf{i} - 3\,\mathbf{k}$ m

$\mathbf{AB} \times \mathbf{BC} = (4\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{k}) \times (-5\,\mathbf{i} - 3\,\mathbf{k})$

AB × **BC** = 22 **j** m,

entonces, **M** = ± 10 **j** m

5. Dos cubos de 12 y 20 cm de lado, están colocados como indica la figura. Encuentre:
a) **AJ** y **NB,**
b) el ángulo formado por los vectores **JM** y **GF**,
c) la proyección de **HK** sobre **GF.**



a) **AJ** = (12 – 0)**i** + (20 – 0)**j** + (0 – 20)**k**

AJ = 12 **i** + 20 **j** – 20 **k** cm

NB = (20 – 0)**i** + (0 – 32)**j** + (20 – 0)**k**

NB = 20 i – 32 **j** + 20 **k** cm

b) **JM** = (0 – 12)**i** + (32 – 20)**j** + (12 – 0)**k**

JM = – 12 **i** + 12 **j** + 12 **k** cm

$JM = \sqrt{(-12)^2 + (12)^2 + (12)^2} = \sqrt{432}$ cm

GF = (20 – 0)**i** +(0 – 20)**j** +(0 – 0)**k**

GF = 20 **i** – 20 **j** cm

$GF = \sqrt{(20)^2 + (20)^2} = \sqrt{800}$ cm

JM • GF = – 480

$\theta = \cos^{-1}$ [(**JM • GF**) / (*JM GF*)
$\theta = \cos^{-1}$ [(–480) / (20.78) (28.28)]

$\theta = 144.74°$

c) $\mathbf{HK} = (12 - 0)\,\mathbf{i} + (32 - 20)\,\mathbf{j} + (0 - 12)\,\mathbf{k}$

$\mathbf{HK} = 12\,\mathbf{i} + 12\,\mathbf{j} - 12\,\mathbf{k}$ cm

$\mathbf{HK}_{GF} = (\mathbf{HK} \bullet \mathbf{u}_{GF})\,\mathbf{u}_{GF}$

$\mathbf{HK}_{GF} = [(12\,\mathbf{i} + 12\,\mathbf{j} - 12\,\mathbf{k}) \bullet (20\,\mathbf{i} - 20\,\mathbf{j})]\,(20\,\mathbf{i} - 20\,\mathbf{j}) / 800$

$\therefore \mathbf{HK}_{GF} = \mathbf{0}$

2.2 VELOCIDAD

6. Una partícula se mueve sobre una línea recta que pasa por los puntos *A* (–2,4) m y *B* (1,0) m. Sobre la partícula no actúa aceleración alguna y a t = 2 s la velocidad tiene una magnitud de 5 m/s, ¿cuál es el vector velocidad instantánea cuando t = 10 s? Asuma que la partícula se mueve desde *A* hacia *B*.

La partícula se mueve con *MRU*, es decir con velocidad constante.

Se desplaza desde *A* hacia *B*, luego su desplazamiento es.

$\Delta\mathbf{r} = [(1,0) - (-2, 4)]$ m

$\Delta\mathbf{r} = 3\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{j}$ m

El unitario de su velocidad es:

$\mathbf{u}_v = (3\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{j}) / 5$

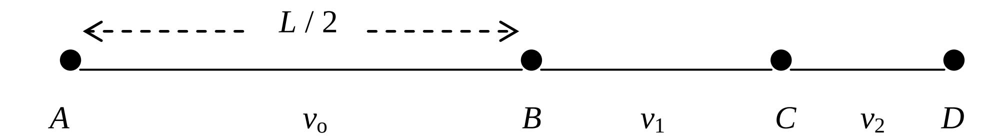
$\mathbf{u}_v = 0.6\,\mathbf{i} - 0.8\mathbf{j}$

La velocidad es la misma en cualquier instante, por lo que:

$\mathbf{v}_{10} = 5$ m/s $(0.6\,\mathbf{i} - 0.8\mathbf{j})$

$\mathbf{v}_{10} = (3\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{j})$ m/s

7. Un cuerpo se mueve por una línea recta sin cambiar la dirección de su movimiento. La mitad de su trayectoria lo hace con una velocidad v_o y la parte restante, con una velocidad v_1 durante la primera mitad del tiempo y con una velocidad v_2, en la parte final. Encuentre la velocidad media del cuerpo.



Si se hace coincidir el eje x del sistema de referencia con la dirección del movimiento, entonces la velocidad media puede escribirse como

$$v_m = \Delta x / \Delta t.$$

Ya que el movimiento es uniforme se tiene que:

$$\Delta x = v\, \Delta t.$$

En el tramo AB se cumple que:

$L / 2 = v_o\, t_{AB}$, de donde

$$t_{AB} = L / 2\, v_o$$

Si en el tramo BC la partícula recorre la longitud s, entonces:

$$t_{BD} / 2 = s / v_1,$$

de donde

$$s = v_1\, t_{BD} / 2.$$

En el tramo CD se cumple que:

$$t_{BD} /2 = (\,(L/2) - s) / v_2\, ,$$

reemplazando el valor de s en la última ecuación, se deduce que:

$$t_{BD} = L / (v_1 + v_2)$$

$$t_{AD} = t_{AB} + t_{BD}\, ,$$

al reemplazar los valores de t_{AB} y t_{BD} se encuentra que:

$$v_m = \frac{2v_o(v_1 + v_2)}{2v_o + v_1 + v_2}$$

8. Una canoa va y regresa entre los puntos *A* y *B* de la misma orilla de un río, cuyas aguas fluyen desde *A* hacia *B* a razón de *v* m/s. Si la canoa tiene una rapidez de 2*v* m/s en aguas tranquilas, calcule la relación entre el tiempo que se demora en ir la canoa y el tiempo que se demora en regresar.

En el movimiento uniforme se cumple que:

$\Delta t = \Delta x \,/\, v.$

En este caso, $2v + v$ es la rapidez de la canoa respecto a tierra cuando ésta viaja a favor de la corriente y $2v - v$, cuando viaja en contra de la corriente, y si se considera que la distancia entre *A* y *B* es *L*, se tiene:

$t_{ida} = L \,/\, (\, 2v + v) = L \,/\, 3v$

$t_{regreso} = L \,/\, (2v - v) = L \,/\, v$

$t_{ida} \,/\, t_{regreso} = L\, v \,/\, 3L\, v$

$t_{ida} \,/\, t_{regreso} = 1/3$

9. Un hombre viaja 1 h a 30 km/h y luego otra hora a 50 km/h en dirección contraria. ¿Cuál es su velocidad media para las dos horas de viaje?

Si a la ida, el hombre se movió en la dirección del eje *x* positivo:

$\mathbf{r_1} = \mathbf{v_1}\, \Delta t_1$

$\mathbf{r_1} = (30 \text{ km/h})\, \mathbf{i}\, (1\text{h})$

$\mathbf{r_1} = +30\, \mathbf{i} \text{ km}$

$\mathbf{r_2} = \mathbf{v_2}\, \Delta t_1$

$\mathbf{r_2} = (-\, 50 \text{ km/h})\, \mathbf{i}\, (1\text{h})$

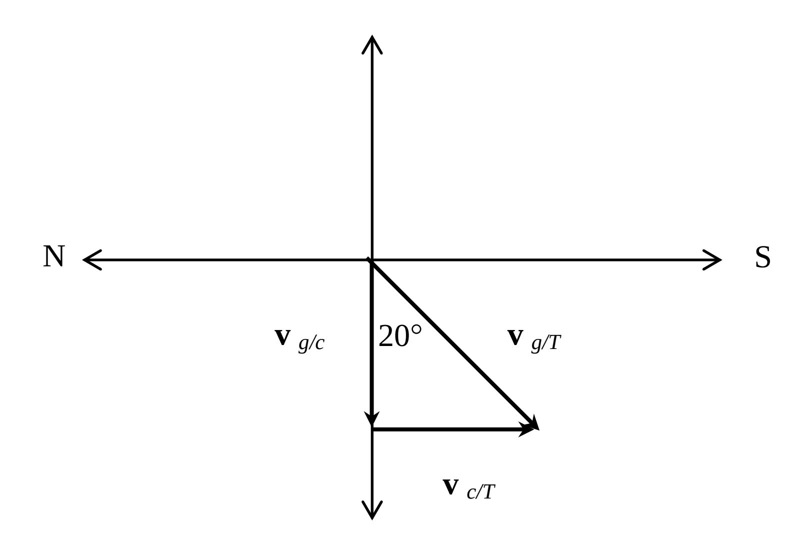
$\mathbf{r_2} = -\, 50\, \mathbf{i} \text{ km}$

$\mathbf{v}_m = (\mathbf{r_2} - \mathbf{r_1}) \,/\, \Delta t,$

$\mathbf{v}_m = [(-50 + 30)\, \mathbf{i} \,/\, (1 + 1)] \text{ km/h}$

$\mathbf{v}_m = -10\, \mathbf{i} \text{ km/h}$

10. Un carro se mueve al Sur con una rapidez de 27 m/s en medio de una lluvia. La trayectoria de cada gota forma un ángulo de 20° con la vertical, medido por un observador fijo en tierra. Un observador sentado en el carro ve en los vidrios de las ventanillas las huellas de la lluvia perfectamente verticales. Determine la rapidez de las gotas de lluvia con respecto a) a tierra y b) al carro.



a) sen 20°= $v_{c/T}$ / $v_{g/T}$

$v_{g/T}$ = 27 / sen20°

$v_{g/T}$ = 78.94 m/s

b) tan 20° = $v_{c/T}$ / $v_{g/c}$

$v_{g/c}$ = 27 / tan20°

$v_{g/c}$ = 74.17 m/s

2.3 ACELERACIÓN

11. Encuentre la aceleración media entre los instantes t = 1 s y t = 2 s para un vehículo que se mueve sobre el eje x, de acuerdo con la función $v_x = 0.5t + 0.1t^2$, donde t está en segundos y v, en m/s.

$v_x = 0.5\ t + 0.1\ t^2$

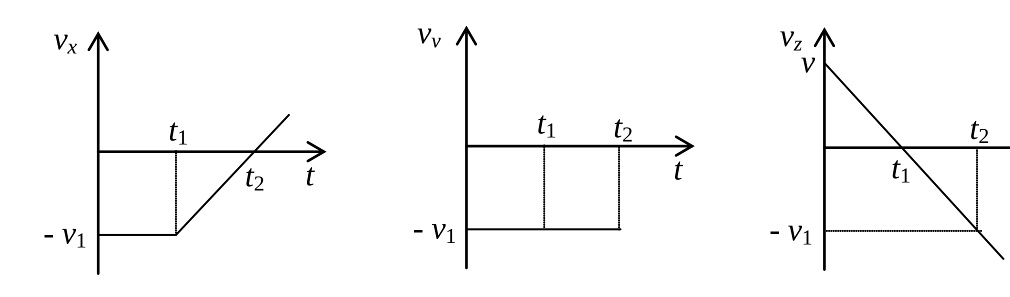
$v_{x\,(1s)}$ = 0.6 m/s

$v_{x\,(2s)}$ = 1.4 m/s

$a_{mx} = (v_{x\,(2s)} - v_{x\,(1s)}) / (t_{2s} - t_{1s})$

$a_{mx} = 0.8$ m/s^2

12. De acuerdo con los gráficos v contra t que se indican, determine:
a) el vector aceleración media en el intervalo de tiempo comprendido entre t_1 y t_2,
b) el vector aceleración instantánea en t_2.



a) Para el instante t_1 se conoce que: $v_x = - v_1$; $v_y = - v_1$ y $v_z = 0$

$\therefore\ \mathbf{v_1} = - v_1\mathbf{i} - v_1\mathbf{j}.$

Para t_2: $v_x = 0$; $v_y = - v_1$; $v_z = - v_1$

$\therefore \mathbf{v_2} = -v_1\mathbf{j} - v_1\mathbf{k}$

$\mathbf{a}_m = (\mathbf{v_2} - \mathbf{v_1}) / (t_2 - t_1)$

$\mathbf{a}_m = (-v_1\,\mathbf{j} - v_1\,\mathbf{k} + v_1\mathbf{i} + v_1\mathbf{j})/(t_2 - t_1)$

$\mathbf{a}_m = [v_1/(t_2 - t_1)]\ (\mathbf{i} - \mathbf{k})$ m/s^2

b) Para $t \geq t_1$ la aceleración es constante, por lo que la aceleración media es igual a la aceleración a cualquier instante

$a_x = (0 - (- v_1))/(t_2 - t_1)$

$a_x = v_1/(t_2 - t_1)$

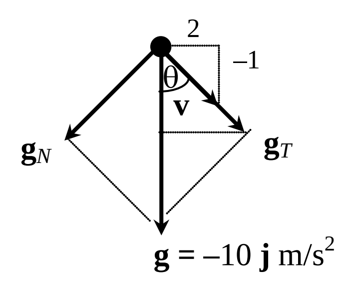
$a_y = 0$

$a_z = (-v_1 - 0)/(t_2 - t_1)$

$a_z = -v_1/(t_2 - t_1)$

$\mathbf{a}_2 = [v_1/(t_2 - t_1)]\ (\mathbf{i} - \mathbf{k})$ m/s^2.

13 Determine las componentes tangencial y normal de la aceleración, en términos de **i** y **j**, de un proyectil que se mueve con una aceleración constante de –10 **j** m/s^2, en el instante en que su velocidad es de 2 **i** – **j** m/s.



a) $\mathbf{g}_T = (\mathbf{g} \bullet \mathbf{v} / v^2)\, \mathbf{v}$

$\mathbf{g}_T = (10/5)\,(2\,\mathbf{i} - \mathbf{j})$

$\mathbf{g}_T = 4\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j}$ m/s^2

b) $\mathbf{g}_N = \mathbf{g} - \mathbf{g}_T$

$\mathbf{g}_N = -\,10\,\mathbf{j} - (4\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j})$

$\mathbf{g}_N = -\,4\,\mathbf{i} - 8\,\mathbf{j}$ m/s^2

14 Una partícula se mueve a lo largo de cierta trayectoria. En un punto *P* se conocen su velocidad **v** = 4 **i** + 3 **j** m/s y su aceleración **a** = 5 **i** m/s^2. En el mencionado punto *P* encuentre a) la aceleración tangencial y b) la aceleración normal.

a) $\mathbf{a}_T = (\mathbf{a} \bullet \mathbf{v} / v^2)\, \mathbf{v}$

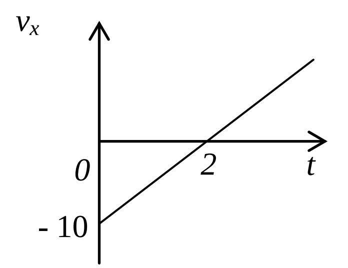
$\mathbf{a}_T = (20/25)\,(4\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j})$

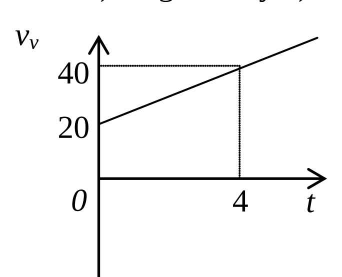
$\mathbf{a}_T = 3.2\,\mathbf{i} + 2.4\,\mathbf{j}$ m/s^2.

b) $\mathbf{a}_N = \mathbf{a} - \mathbf{a}_T$

$\mathbf{a}_N = 1.8\,\mathbf{i} - 2.4\,\mathbf{j}$ m/s^2.

15 El movimiento de una partícula se realiza de acuerdo con los siguientes gráficos v_x y v_y contra *t*. Para *t* = 6 s, determine el vector aceleración a) tangencial y b) normal.





Las componentes a_x y a_y de la aceleración son constantes, por tanto se tiene que:

$a_x = (v_{x2} – v_{x1}) / (t_2 – t_1)$

$a_x = [0 – (– 10)] / (2 – 0) = 5$ m/s^2

$a_y = (v_{y2} – v_{y1}) / (t_2 – t_1)$

$a_y = (40 – 20) / (4 – 0) = 5$ m/s^2

$\mathbf{a} = 5\,\mathbf{i} + 5\,\mathbf{j}$ m/s^2

Para determinar las componentes de v_x y v_y de la velocidad de la partícula a 6 s, se tiene que:

$v_x = – 10 + 5\,t$

$v_{x(6s)} = –10 + 30 = 20$ m/s

$v_y = 20 + 5\,t$

$v_{y(6s)} = 20 + 30 = 50$ m/s

$\mathbf{v}_{6s} = 20\,\mathbf{i} + 50\,\mathbf{j}$ m/s

a) $\mathbf{a}_{T\,6s} = (\mathbf{a} \bullet \mathbf{v}_{6s} / v_{6s}^{\;2})\,\mathbf{v}_{6s}$

$\mathbf{a}_{T\,6s} = [(5\,\mathbf{i} + 5\,\mathbf{j}) \bullet (20\,\mathbf{i} + 50\,\mathbf{j})/(20^2 + 50^2)]\,\mathbf{v}_{6s}$

$\mathbf{a}_{T\,6s} = (270/2900)\,\mathbf{v}_{6s}$

$\mathbf{a}_{T\,6s} = 1.86\,\mathbf{i} + 4.66\,\mathbf{j}$ m/s^2

b) $\mathbf{a}_{N\,6s} = \mathbf{a} – \mathbf{a}_T$

$\mathbf{a}_{N\,6s} = 3.14\,\mathbf{i} + 0.34\,\mathbf{j}$ m/s^2

2.4 MOVIMIENTO RECTILÍNEO

16. Al instante t = 2 s, una partícula A se encuentra en el punto P (4, 5) m y se mueve con una velocidad constante $\mathbf{v}_A = – 2\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j}$ m/s. Otra partícula B, que se mueve con MRU, al instante t = 5 s se encuentra en el punto Q (3, 5) m y al instante t = 10 s en el punto R (-5, –7) m. Determine:
a) la velocidad de B,
b) la posición de A respecto a B al instante 20 s.

a) La partícula *B* se mueve con MRU, por tanto para el intervalo comprendido entre 5 y 10 segundos, se tiene que:

$\mathbf{v}_B = (\mathbf{r}_\mathrm{f} - \mathbf{r}_\mathrm{o}) / \Delta t$

$\mathbf{v}_B = (-5\,\mathbf{i} - 7\,\mathbf{j} - 3\,\mathbf{i} - 5\,\mathbf{j}) / (10 - 5)$

$\mathbf{v}_B = -1.6\,\mathbf{i} - 2.4\,\mathbf{j}$ m/s

b) La partícula *A*, también se mueve con MRU, por lo tanto para el intervalo entre 2 y 20 segundos se tiene que:

$\mathbf{r}_\mathrm{f} = \mathbf{r}_\mathrm{o} + \mathbf{v}\Delta \mathrm{t}$

$\mathbf{r}_{fA} = 4\,\mathbf{i} + 5\,\mathbf{j} + (-2\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j})\,(20 - 2)$

$\mathbf{r}_{fA} = 4\,\mathbf{i} + 5\,\mathbf{j} - 36\,\mathbf{i} + 54\,\mathbf{j}$

$\mathbf{r}_{fA} = -32\,\mathbf{i} + 59\,\mathbf{j}$ m.

La posición de la partícula *B* al instante $t = 20$ s es:

$\mathbf{r}_{fB} = 3\,\mathbf{i} + 5\,\mathbf{j} + (-1.6\,\mathbf{i} - 2.4\,\mathbf{j})\,(20 - 5)$

$\mathbf{r}_{fB} = -21\,\mathbf{i} - 31\,\mathbf{j}$ m.

La posición relativa de *A* respecto a *B* para el instante final es:

$\mathbf{r}_{A/B} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$

$\mathbf{r}_{A/B} = (-32\,\mathbf{i} + 59\,\mathbf{j}) - (-21\,\mathbf{i} - 31\,\mathbf{j})$

$\mathbf{r}_{A/B} = -11\,\mathbf{i} + 90\,\mathbf{j}$ m.

17. Una partícula se mueve de acuerdo con las siguientes ecuaciones de su posición:
$x_t = -t^2 + 2\,t + 10$ m; $y_t = 0.5\,t^2 - t + 20$ m.
Determine la velocidad a los 10 s del movimiento.

Las ecuaciones dadas corresponden al MRUV. Por analogía con las ecuaciones generales de este tipo de movimiento se tiene que:

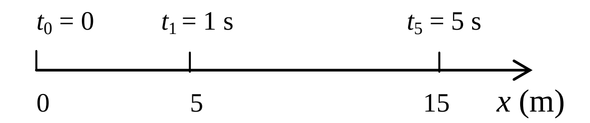
$v_x = 2 - 2\,t$ y $v_y = -1 + t$

Para $t = 10$ s se obtiene:

$v_x = -18$ m/s y $v_y = 9$ m/s

$\therefore\ \mathbf{v}_{10} = (-18\,\mathbf{i} + 9\,\mathbf{j})$ m/s.

18. Una partícula que se mueve a lo largo del eje x, al instante $t = 0$ s pasa por el origen con MRUV, a $t = 1$ s se encuentra a 5 m, y a $t = 5$ s encuentra a 15 m. Determine después de cuántos segundos de haber pasado por el origen retorna a este.



De la ecuación general para la posición de una partícula con *MRUV* se tiene que para el instante $t = 1$ s:

$$5 = v_0\,(1) + ½\,a\,(1)^2$$

$$5 = v_0 + ½\,a$$

$$10 = 2\,v_0 + a$$

Para $t = 5$ s:

$$15 = v_0\,(5) + ½\,a\,(5)^2$$

$$15 = 5\,v_0 + 12.5\,a$$

Con esto se tiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Resolviendo este sistema se encuentra que:

$$v_0 = 5.5 \text{ m/s}$$

$$a = -1 \text{ m/s}^2.$$

Es decir, $\mathbf{v}_0 = 5.5\,\mathbf{i}$ m/s y $\mathbf{a} = -\,(1)\,\mathbf{i}$ m/s^2.

Para que la partícula vuelva a pasar por el origen debe cumplirse que $\Delta r = 0$, entonces:

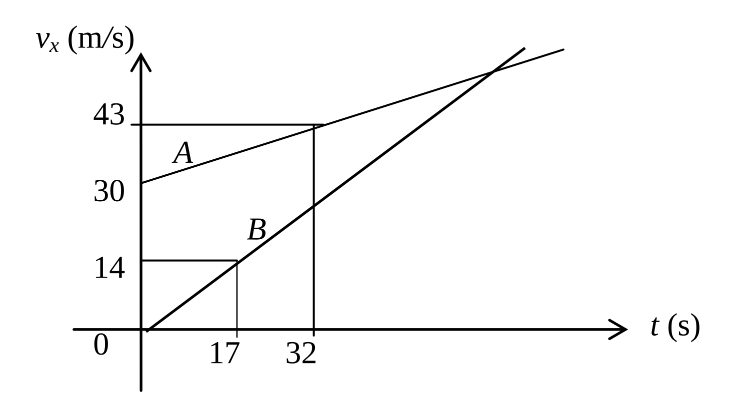
$$\Delta r = v_0\,\Delta\,t + ½\,a\,\Delta\,t^2$$

$$0 = 5.5\,(\Delta\,t) - ½\,(1)\,(\Delta\,t^2)$$

$$5.5\,\Delta\,t = ½\,\Delta\,t^2$$

$$\Delta\,t = 11 \text{ s}$$

19. Dos partículas *A* y *B*, que tienen la misma posición al instante t = 0 s, se mueven con MRUV, de acuerdo con el gráfico v_x contra t de la figura. Determine el tiempo en el cual las partículas vuelven a encontrarse.



Para que las dos partículas *A* y *B*, vuelvan a encontrarse debe cumplirse que $t = \Delta t_A = \Delta t_B$ y $\Delta x_A = \Delta x_B$

Si $\Delta x_A = \Delta x_B$ las áreas bajo las curvas entre 0 y t deben ser iguales

$\frac{1}{2}\, t\, (v_{Af} - 30) + 30\, t = \frac{1}{2}\, t\, v_{Bf}$,

pero, del gráfico dado se tiene que:

$v_{Af} = [30 + (13/32)\, t]$ y $v_{Bf} = (14/17)\, t$

por lo que

$\frac{1}{2}\, t\, [30 + (13/32)\, t - 30] + 30\, t = \frac{1}{2}\, t\, (14/17)\, t$

$(14/34)\, t^2 - (13/64)\, t^2 = 30\, t$

$0.209\, t^2 = 30\, t$

De donde se encuentra que: t = 143.8 s

20. Desde un globo, que asciende con rapidez constante de 6 m/s, se lanza verticalmente hacia arriba un cuerpo *A* con una rapidez de 3 m/s, con respecto al globo y un segundo más tarde se lanza otro cuerpo *B*, hacia abajo, con una rapidez de 2 m/s, con respecto al globo. Determine la posición de *B* con respecto a *A*, dos segundos después de que fue lanzado *B*.

A t = 0 s: $\mathbf{v}_{A/G} = 3\, \mathbf{j}$ m/s y $\mathbf{r}_{A/G} = 0$

A t = 1 s: $\mathbf{v}_{B/G} = -2\, \mathbf{j}$ m/s y $\mathbf{r}_{B/G} = 0$

La ecuación general para la caída libre establece que:

$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0\, \Delta t + \frac{1}{2}\, g\, \Delta t^2$.

En el caso del cuerpo A, para t = 3 s se tiene que:

$\mathbf{r}_{A/G} = 0 + 3\,\mathbf{j}\,(3) + ½\,(-10\,\mathbf{j})\,(3)^2$

$\mathbf{r}_{A/G} = -36\,\mathbf{j}$.

En el caso del cuerpo B, para t = 3 s se tiene que:

$\mathbf{r}_{B/G} = 0 - 2\,\mathbf{j}\,(2) + ½\,(-10\,\mathbf{j})\,(2)^2$

$\mathbf{r}_{B/G} = -\ 24\,\mathbf{j}$.

Para t = 3 s: $\mathbf{r}_{\mathrm{B/A}} = \mathbf{r}_{\mathrm{B/G}} - \mathbf{r}_{\mathrm{A/G}}$

$\mathbf{r}_{B/A} = -24\,\mathbf{j} + 36\,\mathbf{j}$

$\mathbf{r}_{B/A} = 12\,\mathbf{j}$ m.

2.5 MOVIMIENTO PARABÓLICO

21. Una partícula al pasar por el centro del sistema de referencia tiene una velocidad inicial de 10 **j** m/s. Al mismo tiempo actúa sobre él una aceleración de 2 **i** m/s^2. Determine al instante 3 s la:

a) posición
b) velocidad
c) ecuación de la trayectoria del movimiento de la partícula

a) $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{v}_0\,t + ½\,\mathbf{a}\,t^2$

$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0\,t + ½\,\mathbf{a}\,t^2$

$\mathbf{r} = 10\,\mathbf{j}\,(3) + ½\,(2\,\mathbf{i}\,)\,(9)$

$\mathbf{r} = 9\,\mathbf{i} + 30\,\mathbf{j}$ m

b) $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}\,t$

$\mathbf{v} = 10\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{i}\,(3)$

$\mathbf{v} = 6\,\mathbf{i} + 10\,\mathbf{j}$ m/s

c) $x = y \tan\theta + ½\,(a/v_{0y}{}^2)\,y^2$

$x = ½\,(2/10^2)\,y^2$

$x = y^2/100$

22. Un bateador golpea una pelota en el punto *A* (–300, 1) m con una rapidez de 150 m/s y un ángulo de elevación de 60° con el eje *x*.
a) Calcule la velocidad de la pelota en el instante que pasa por $x = 0$.
b) ¿Cuáles son las componentes tangencial y normal de la aceleración en dicho punto?

a) $v_x = 150 \cos 60^o = 75$ m/s

$v_{0y} = 150$ sen $60° = 129.89$ m/s

$x = v_{0x}\,\Delta t$

$300 = 75\,\Delta t$

$\Delta t = 4$ s

$v_{y\,4s} = v_{0y} - g\,t = 129.9 - 40$

$\mathbf{v}_{y\,4s} = 89.9\,\mathbf{j}$ m/s

$\mathbf{v}_{\,4s} = 75\,\mathbf{i} + 89.9\,\mathbf{j}$ m/s

b) $\mathbf{a}_T = (\mathbf{g} \bullet \mathbf{u}_v)\,\mathbf{u}_v$

$\mathbf{a}_T = [-10\,\mathbf{j} \bullet (0.64\,\mathbf{i} + 0.77\,\mathbf{j})]\,\mathbf{u}_v$

$\mathbf{a}_T = (-7.7)\,(0.64\,\mathbf{i} + 0.77\,\mathbf{j})$

$\mathbf{a}_T = -4.93\,\mathbf{i} - 5.93\,\mathbf{j}$ m/s^2

$\mathbf{a}_N = \mathbf{g} - \mathbf{a}_T$

$\mathbf{a}_N = -10\,\mathbf{j} - (-4.93\,\mathbf{i} - 5.93\,\mathbf{j})$ m/s^2

$\mathbf{a}_N = 4.93\,\mathbf{i} - 4.07\,\mathbf{j}$ m/s^2.

23. Dos personas, *A* y *B*, se encuentran en las ventanas de dos edificios ubicados uno frente a otro, en los lados opuestos de una calle. Los edificios están separados entre sí 10 m y las alturas de las ventanas respecto al piso son 15 m para *A* y 20 m para *B*. Si *B* lanza, hacia la derecha, un globo con agua con la intención de impactar a *A* y la rapidez inicial del globo es de 10 m/s, calcule:
a) el ángulo de disparo respecto a la horizontal,
b) el vector velocidad del proyectil el momento del impacto.

a) $y = x \tan\theta_0 - g\,x^2 / 2\,v_{0x}^2$

$-5 = 10 \tan\theta_0 - 5\,(100) / 100 \cos^2\theta_0$

$-1 = 2\,(\text{sen}\,\theta_0 \;/ \cos\theta_0) - (1 / \cos^2\theta_0)$

$-1 = (2\,\text{sen}\,\theta_0\,\cos\theta_0 - 1) / \cos^2\theta_0$

$-\cos^2\theta_0 = 2\,\text{sen}\,\theta_0 \cos\theta_0 - 1$

$1 - \cos^2\theta_0 = 2\,\text{sen}\,\theta_0 \cos\theta_0$

$\text{sen}^2\theta_0 = 2\,\text{sen}\,\theta_0 \cos\theta_0$

$\text{sen}\,\theta_0 / \cos\theta_0 = 2$

$\tan\theta_0 = 2$

$\theta_0 = 63.43^o$

b) $x = v_{0x}\,\Delta t$

$10 = 10 \cos 63.43° \, t_{BA}$

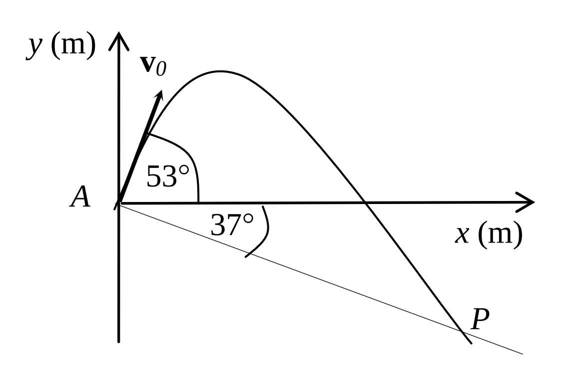
$t_{BA} = 2.24$ s

$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_A + \mathbf{g}\, t_{BA}$

$\mathbf{v}_A = (10 \cos 63.43°)\,\mathbf{i} + (10\,\text{sen}\, 63.43°)\,\mathbf{j} + (-10)\,\mathbf{j}\, 2.24$ m/s

$\mathbf{v}_A = 4.47\,\mathbf{i} - 13.\,46\,\mathbf{j}$ m/s

24. Un objeto es lanzado desde el punto A con una velocidad $\mathbf{v}_0$. Si el objeto impacta en el punto P, a 250 m de A, determine la velocidad de lanzamiento.



$y = x \tan 53° - 10\, x^2 / (2\, v_0^2 \cos^2 53°)$

Del gráfico se tiene que:

$y = -\,250\,\text{sen}\, 37^o$

$y = -150$ m

$x = 250 \cos 37^o$

$x = 200$ m

Reemplazando en la ecuación inicial:

$-150 = 200 \tan 53º - 10\,(200)^2 / 2\,v_0^2\,(0.36)$

$-150 = 266 - (400000 / 0.72\,v_0^2)$

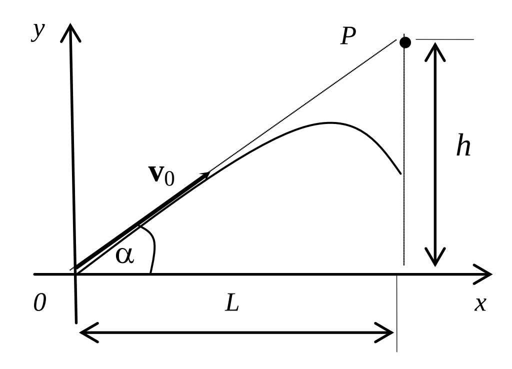
$416 = 400000 / 0.72\,v_0^2$

$v_0 = 36.54$ m/s

$\mathbf{v}_0 = 36.54\,(0.6\,\mathbf{i} + 0.8\,\mathbf{j}\,)$ m/s

$\mathbf{v}_0 = 21.92\,\mathbf{i} + 29.23\,\mathbf{j}$ m/s

25. Desde el punto *O* un cazador apunta directamente a un blanco colocado en el punto *P* y dispara. En el instante que dispara el cazador se deja caer el blanco desde *P*. Demuestre que el proyectil impacta en el blanco.



En este problema se considera la siguiente simbología: *b* = bala, *B* = blanco, *Q* = punto de impacto.

Para la bala se tiene que:

$x_b = v \cos\alpha\ t$

$y_b = v_0 \operatorname{sen}\alpha\ t - ½\, g\, t^2;$

mientras que para el blanco se tiene que:

$x_B = L$

$y_B = h - ½\, g\, t^2$

$x_b = x_B$

$v_0 \cos\alpha\, t = L$

$t = L / v_0 \cos\alpha$

$y_b = y_B$

$v_0 \ \text{sen}\alpha \ t = h$

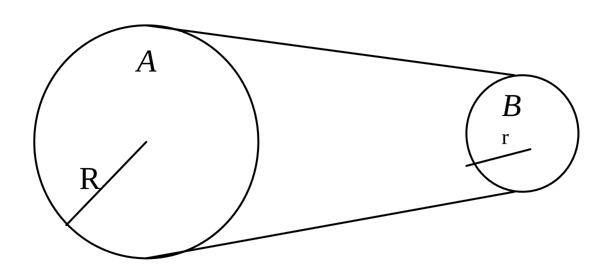
$v_0 \ \text{sen}\alpha \ (L / v_0 \cos\alpha) = h$

$\tan \alpha = h / L$

De acuerdo con el gráfico, también $\tan \alpha = h / L$ por lo que el proyectil sí impacta en el blanco.

2.6 MOVIMIENTO ANGULAR Y CIRCULAR

26. Una rueda A de radio R = 0.4 m parte del reposo y aumenta su velocidad angular uniformemente a razón de 0.6 π rad/s^2. La rueda A transmite su movimiento a una rueda B mediante una correa. El radio de B es r = 0.15 m. ¿Cuál es el tiempo necesario para que B alcance una rapidez angular de 300 rpm?



ω_{Bf} = 300 rpm = 31.4 rad/s

En vista de que las 2 ruedas están unidas por una correa, las velocidades lineales deben ser iguales, por lo tanto:

$v_{Af} = v_{Bf}$

$\omega_{Af} R = \omega_{Bf} \, r$

$\omega_{Af} = \omega_{Bf} \, r / R$

$\omega_{Af} = (31.4)\,(0.15) / 0.4$

$\omega_{Af} = 11.77$ rad/s

$\omega_{Af} = \omega_{A0} + \alpha_A\ (t - t_0)$

$11.77 = 0 + 0.6\ \pi\ (t - 0)$

$t = 6.25$ s

27. Una partícula se mueve en una circunferencia de 0.7 m de radio, en el sentido contrario al avance de las manecillas del reloj con rapidez angular constante $\omega = 2$ rad/s. A $t = 0$ parte del punto *A*. Calcule el vector aceleración media para el intervalo de $t_1 = 1.7$ s hasta $t_2 = 3$ s.

$$\mathbf{a}_m = \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{t_2 - t_1}$$

Como es un MCU se cumple que:

$v_2 = v_1 = \omega R = (2)\ (0,7) = 1,4$ m/s.

Para saber la dirección de $\mathbf{v}_1$ **x** $\mathbf{v}_2$, es necesario encontrar las posiciones angulares a los tiempos t_1 y t_2.

$\theta_1 = \theta_0 + \omega(t_1 - t_0)$

$\theta_1 = \pi/6 + (2)\ (1.7–0)$

$\theta_1 = 3.92$ rad $= 224.71°$

$\theta_2 = \theta_0 + \omega(t_2 - t_0)$

$\theta_2 = \pi/6 + (2)\ (3–0)$

$\theta_2 = 6.52$ rad $= 373.75°$.

Por lo tanto la partícula al t_1 *y* t_2 está en los puntos *B y C* respectivamente, entonces:

$\mathbf{v}_1 = 1.4$ (sen 44.71° **i** – cos 44.71° **j**)

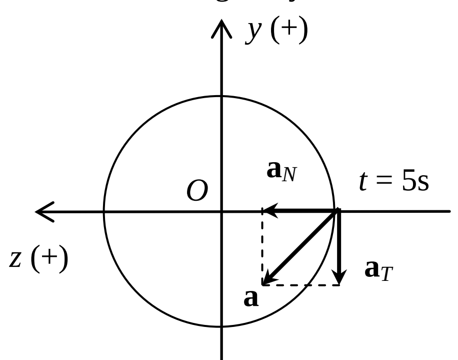
$\mathbf{v}_1 = 0.98$ **i** – 0.99 **j** m/s

$\mathbf{v}_2 = 1.4$ (–sen 13.75° **i** + cos 13.75° **j**)
$\mathbf{v}_2 = -\ 0.33$ **i** + 1.35 **j** m/s

$\mathbf{a}_m = [(-\ 0.33\ \mathbf{i} + 1.35\ \mathbf{j}) - (0.98\ \mathbf{i} - 0.99\ \mathbf{j})]\ /\ (3 - 1.7)$

$\mathbf{a}_m = \mathbf{i} + 1.8\ \mathbf{j}$ m/s^2

28. Una partícula gira en el sentido del avance de las manecillas del reloj en un plano vertical *yz* sobre una trayectoria circular de radio 10 m con MCUV. En el instante $t = 5$ s se encuentra en el punto -10 **k** m y tiene una aceleración de 5 **k** – 4 **j** m/s^2. Para el instante $t = 0$, determine los vectores aceleración angular y velocidad angular.



Como $\mathbf{a} = -4\,\mathbf{j} + 5\,\mathbf{k}$, entonces : $\mathbf{a}_N = 5\,\mathbf{k}$ m/s^2 y $\mathbf{a}_T = -4\,\mathbf{j}$ m/s^2;

pero, $a_N = \omega_5^2 R$

por lo que: $\omega_5 = \sqrt{\dfrac{a_n}{R}}$

$\omega_5 = \sqrt{\dfrac{5}{10}}$ = -0.707 rad/s

y $\alpha = a_T / R$

$\alpha = 4 / 10 = 0.4$ rad/s

Aplicando la regla de la mano derecha, el unitario de la velocidad angular es **–i**, así como el de la aceleración angular, ya que el movimiento es acelerado. Por lo tanto:

$\boldsymbol{\alpha} = -0.4\,\mathbf{i}$ rad/s^2

y $\boldsymbol{\omega}_0 = \boldsymbol{\omega}_5 - \boldsymbol{\alpha}\,(t_5 - t_0)$

$\boldsymbol{\omega}_0 = [-0.707 - (-0.4)\,(5 - 0)]\,\mathbf{i}$

$\boldsymbol{\omega}_0 = 1.29\,\mathbf{i}$ rad/s

29. Si la posición angular de una partícula que describe una trayectoria circular de radio 1.2 m, en sentido contrario al avance de las manecillas del reloj, viene dada por la función $\theta_t = \pi/2 + t + t^2$, donde θ está en rad y t en s. Determine:
a) la ecuación de la velocidad angular en función del tiempo,
b) el vector aceleración **a** cuando $t = 3$ *s*.

a) De acuerdo con la ecuación dada se tiene que:

$\theta_0 = \pi/2$ rad, $\omega_0 = 1$ rad / s y $\alpha = 2$ rad / s^2,

Por lo tanto,

$\omega_t = \omega_0 + \alpha t$

$\omega_t = 1 + 2t$

b) $\theta_3 = \pi/2 + 3 + 9 = 13.57 \text{ rad} = 777.9°$

$a_T = \alpha R = (2)(1.2) = 2.4 \text{ m/s}^2$

$\mathbf{a}_{T\,3s} = (2{,}4)(-\text{sen } 57.9\ \mathbf{i} + \cos 57.9°\mathbf{j})$

$\mathbf{a}_{T\,3s} = (-2.03\ \mathbf{i} + 1.27\mathbf{j}) \text{ m/s}^2$

$\omega_{3s} = 1 + 2(3) = 7 \text{ rad/s}$

$a_{N\,3s} = \omega_{3s}^2 R = (7)^2 (1.2) = 58.8 \text{ m/s}^2$

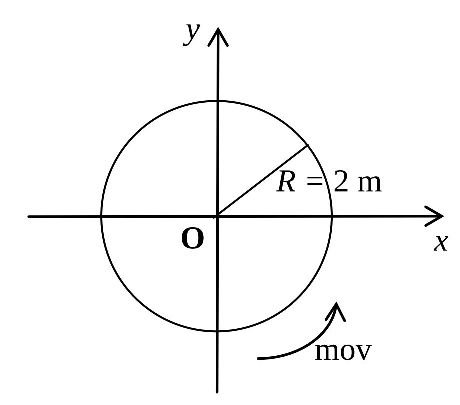
$\mathbf{a}_{N\,3s} = 58.8(-\cos 57.9\ \mathbf{i} - \text{sen } 57.9\mathbf{j})$

$\mathbf{a}_{N\,3s} = -31.2\ \mathbf{i} - \text{sen } 49.8\mathbf{j}) \text{ m/s}^2$

$\mathbf{a}_{3s} = \mathbf{a}_{T\,3s} + \mathbf{a}_{N\,3s}$

$\mathbf{a}_{3s} = -33.23\ \mathbf{i} - 48.53\mathbf{j} \text{ m/s}^2$

30. Una partícula se mueve por una trayectoria circular con movimiento uniformemente variado. A $t = 0$ su velocidad es $\mathbf{v}_0 = 3\ \mathbf{i} + 4\ \mathbf{j}$ m/s y su rapidez disminuye a razón de 2 m/s cada segundo. Determine los vectores:
a) posición de la partícula a $t=0$,
b) aceleración a $t = 2.5$ s,
c) velocidad a $t = 5$ s,
d) aceleración tangencial a $t = 0$ y $t = 5$ s.



a) Como $\mathbf{v}_0 = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ m/s, la partícula inicialmente debe estar en el punto *A* y se puede calcular el ángulo β:

$\beta = \tan^{-1}(4/3) = 53.13°$

$\mathbf{r}_{0} = \mathbf{OA} = 2$ (sen 53.13° $\mathbf{i}$ – cos 53,13° $\mathbf{j}$)

$\mathbf{r}_0 = 1{,}6\,\mathbf{i} - 1{,}2\,\mathbf{j}$ m/s

Es decir, la partícula se encuentra a t = 0 en el punto *A* (2m; 53.13°)

b) $v_0 = \sqrt{9+16} = 5$m/s

$\omega_0 = v_0 / R = 2.5$ rad/s

$\alpha = a_T / R = 1$ rad/s^2

$\omega_{2.5} = \omega_0 + \alpha t$

$\omega_{2.5} = 2.5 - (1)(2.5) = 0$

$\theta_{2.5} = \theta_0 + \omega_0 t + \alpha t^2/2$

$\theta_{2.5} = 5.63 + (2.5)(2.5) + (-1)(2.5)^2/2$

$\theta_{2.5} = 8.75$ rad = 501.59°

Por lo tanto a *t* = 2,5s la partícula está en *B* (2m; 141.59°), entonces:

$\mathbf{a}_T = 2$ (cos 51.59° $\mathbf{i}$ + sen 51.59° $\mathbf{j}$)

$\mathbf{a}_T = 1.24\,\mathbf{i} + 1.56\,\mathbf{j}$

$\mathbf{a}_{2.5s} = \mathbf{a}_T + \mathbf{a}_N = \mathbf{a}_T$

$\mathbf{a}_{2.5s} = 1.24\,\mathbf{i} + 1.56\,\mathbf{j} + \mathbf{0}$

$\mathbf{a}_{2.5s} = 1.24\,\mathbf{i} + 1.56\,\mathbf{j}$ m/s^2

c) Debido a que la aceleración angular es constante y al tiempo 2.53 s llega al reposo, al tiempo 5 s estaría de nuevo pasando por el punto *A* con la misma rapidez y en dirección contraria, por lo tanto la velocidad a *t=5s* sería:

$\mathbf{v}_5 = -3\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{j}$ m/s.

d) A *t* = 0 y a *t* = 5s, la aceleración tangencial es:

$\mathbf{a}_T = 2$ (– cos 53.13° $\mathbf{i}$ – sen 53.13° $\mathbf{j}$)

$\mathbf{a}_T = -1.2\,\mathbf{i} - 1.6\,\mathbf{j}$ m/s^2.

CAPÍTULO 3

DINÁMICA

CAPÍTULO 3

DINÁMICA

3.1 INTRODUCCIÓN

Una de las grandes contribuciones a la Física fue el aporte al estudio del movimiento de los cuerpos que realizaron Galileo y Newton. Ellos explicaron el movimiento de los cuerpos. Para Galileo el movimiento de los cuerpos debe obedecer a ciertas leyes, por ejemplo la de la inercia.

Newton desarrolló varias teorías, entre ellas la Teoría de la Gravitación Universal, que fueron la base fundamental de una nueva concepción de hacer Física en relación con la que se tenía hasta entonces.

La Teoría de la Gravitación Universal de Newton permitió el desarrollo de otras que explican el comportamiento del Universo; y generó una gran rama dentro de la Física, llamada Mecánica Clásica. En esta teoría el espacio y el tiempo son absolutos.

Es importante anotar que hasta la fecha muchos de los aportes de Newton han sido la base fundamental para explorar nuevas ideas sobre el Universo.

Por considerar de importancia, previo al tratamiento de la Leyes de Newton se presenta un breve resumen sobre las interacciones, en el que se describe algunos aspectos que se formalizan luego en las leyes de Newton.

3.2 INTERACCIONES

Desde que el hombre empezó a preguntarse como las estrellas estaban sobre su cabeza sin caer, surgieron muchas explicaciones. Unos decían que Dios las tenían atadas al cielo y en el caer de la noche las retiraba todas los días. Otros pensaban que existían seres que controlaban dichos objetos en el firmamento, pero también, existían personas que pensaron que las estrellas se mantienen sobre la tierra por una interacción entre ellas (tierra- estrellas).

En la actualidad, el desarrollo de la Física ha permitido establecer que en la naturaleza se pueden encontrar cuatro tipos de interacciones fundamentales**,** a saber:

- Gravitacional
- Electromagnética
- Fuerte
- Débil

La interacción gravitacional explica la acción recíproca entre cuerpos debido a la masa (propiedad intrínseca de la materia). Se debe recordar que Newton habló sobre esta interacción y la propuso en su "Teoría de la Gravitación Universal".

La electromagnética es la interacción entre cuerpos, debido a otra propiedad de la materia que es la carga.

La interacción fuerte y débil son de carácter nuclear.

La interacción fuerte mantiene estable al núcleo del átomo y la débil permite la ruptura del mismo.

Todo en la naturaleza interactúa, una pelota con la tierra, los cuerpos entre sí, etc. Lo que sucede es que, el efecto de algunas interacciones es muy débil, en comparación con el efecto debido a la interacción producida con la tierra.

El valor y la dirección de la interacción define la cantidad física vectorial llamada fuerza**,** la misma que siempre está presente en toda la naturaleza.

De las observaciones cotidianas se puede concluir que las fuerzas cambian la velocidad de los cuerpos sobre los que actúan. Todo esto nos trae como consecuencia que el cambio en la velocidad de un cuerpo se debe a que sobre él actuó una fuerza neta.

3.3 LEYES DE NEWTON

Primera Ley de Newton

Analice el movimiento de un cuerpo al que se le ha dado un impulso sobre una pista recta con rozamiento. En este caso el cuerpo luego de un tiempo se detendrá, si se disminuye progresivamente el valor de la fuerza de rozamiento el tiempo que transcurre hasta detenerse

será cada vez mayor lo cual conduce a pensar que si la fuerza de rozamiento se hace cero el cuerpo se moverá indefinidamente con velocidad constante.

La ley que explica el comportamiento señalado se conoce con el nombre de Primera Ley de Newton o Ley de la Inercia y podría expresar como:

Todo cuerpo conserva su estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme mientras una fuerza neta no le obligue a cambiar dicho estado.

Esta ley se llama también principio de la inercia, y el movimiento de un cuerpo libre de fuerzas externas se dice que es un movimiento por inercia.

Esta ley es aplicable a todos los sistemas de referencia inerciales. Con el siguiente ejemplo se podrá ilustrar tal situación.

Suponga que una persona se encuentra sentada en el asiento de un vehículo, que se desplaza con movimiento rectilíneo uniforme. Mientras el automóvil siga con velocidad constante el pasajero no sentirá nada extraño en el contacto entre el asiento y su espalda. Esta experiencia es consistente con la primera ley de Newton. De pronto, el vehículo comienza a acelerar e inmediatamente el pasajero siente que el asiento presiona su espalda, esto le hace pensar que su movimiento cambia respecto al exterior, lo cual es correcto; sin embargo, con respecto al automóvil el pasajero sigue sin moverse. Con esto se puede ver que la primera ley de Newton no se cumple para sistemas que tienen aceleración, este sistema no es inercial.

En la mecánica clásica se llaman sistemas inerciales de referencia a aquellos en los cuales se cumple el principio de inercia, entendiéndose por inercia, la tendencia de un cuerpo a mantener su estado de equilibrio. Cualquier sistema de referencia que se encuentre en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme respecto a cualquier sistema inercial es también inercial. Y al contrario, todo sistema que se mueva con aceleración respecto a un sistema inercial, no será inercial.

Un sistema de referencia asociado, rígidamente a la tierra no es inercial, debido principalmente a la rotación y traslación de la tierra. Dado que en este documento se considera a la tierra en reposo, debido a su gran masa, un sistema de referencia ligado a ella será considerado inercial.

Una de las restricciones de esta ley es la utilización de sistemas de referencia inerciales, que existen solamente en una idealización, ya que en la realidad ningún sistema de referencia es inercial.

La acción mutua entre los cuerpos a criterio de la primera ley de Newton es la causa que hace que varíen sus estados de movimiento. Además esta interacción ocasiona deformaciones en los cuerpos. En el presente estudio esta deformación no se analiza en tanto los cuerpos son considerados como masas puntuales (partículas).

Fuerza neta externa

La acción de varios cuerpos sobre un cuerpo *A*, con las fuerzas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$,... $\mathbf{F}_k$ equivale matemáticamente a la acción de una sola fuerza, llamada fuerza resultante o fuerza externa neta, que no es más que una representación de una sola fuerza que matemáticamente es igual a la suma vectorial de las fuerzas mencionadas, es decir:

$$\mathbf{F}_{Neta} = \Sigma\mathbf{F}_k \qquad (3\text{–}1)$$

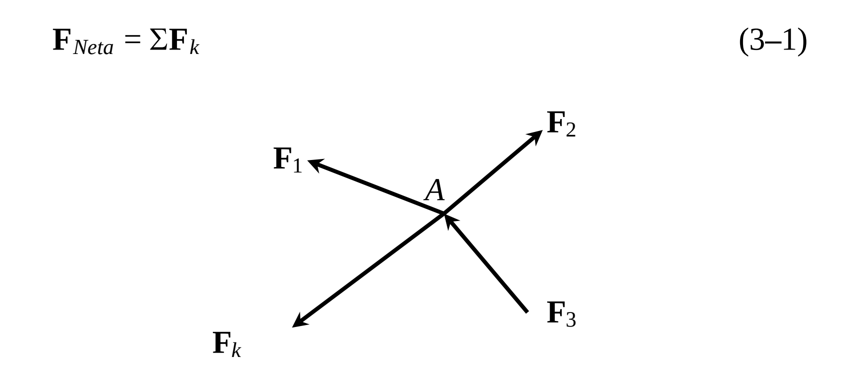


Figura 3–1 Fuerzas que actúan sobre un punto *A*

Cuando se estudia un sistema cualquiera de cuerpos o partículas, las fuerzas que se deben a la acción mutua de dichos puntos materiales se llaman fuerzas internas al sistema.

Cuando:

$$\mathbf{F}_{Neta} = \Sigma\mathbf{F}_k = 0 \qquad (3\text{–}2)$$

se dice que el cuerpo se encuentra en equilibrio de traslación, esto es cuando la velocidad es constante, es decir que puede estar moviéndose con movimiento rectilíneo uniforme respecto a un sistema de referencia o puede estar en reposo. respecto al mismo sistema.

Segunda Ley de Newton

La primera Ley de Newton contiene mucha física, sin embargo está limitada entre otras cosas por ser aplicable solo a cuerpos en equilibrio (reposo o MRU) de traslación, aunque permite reconocer la presencia de una fuerza resultante, neta o total, a partir de la variación de la velocidad que produce esta fuerza al actuar sobre un cuerpo durante un tiempo, no da una relación cuantitativa entre la fuerza y la variación de la velocidad del cuerpo. Esta relación es establecida por la segunda ley.

Para entender el efecto producido por una fuerza resultante **F** en un cuerpo que se encuentra sobre una mesa horizontal sin rozamiento, es necesario analizar las siguientes situaciones posibles:

1. Un cuerpo se encuentra en reposo sobre la mesa y al aplicarle una fuerza constante **F**, durante un intervalo de tiempo Δt, se pone en movimiento cambiando su velocidad de cero a un valor diferente de cero, entonces la fuerza **F** produce una aceleración en el cuerpo.

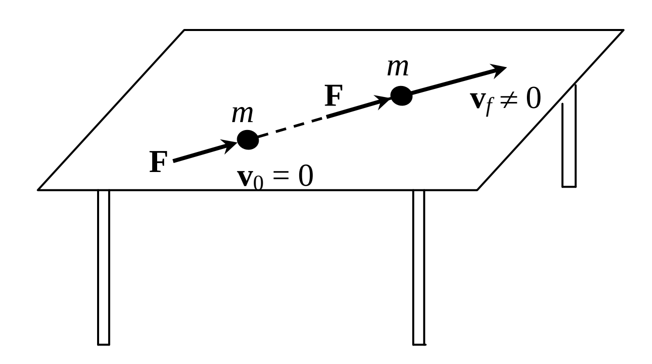


Figura 3–2 Fuerzas aplicadas sobre un cuerpo en reposo.

2. Si el cuerpo inicialmente se mueve con una velocidad $\mathbf{v}_0$ y en un instante determinado se le aplica la fuerza constante **F**, colineal con la velocidad, la rapidez de la partícula aumentará o disminuirá generándose también una aceleración colineal con $\mathbf{v}_0$.

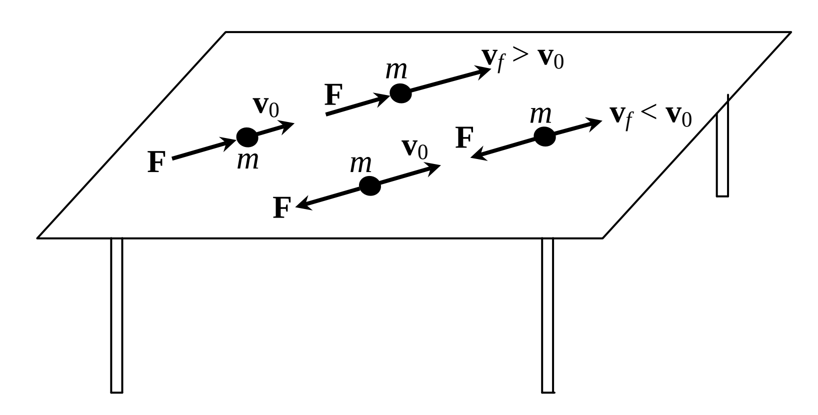


Figura 3–3 Fuerzas colineales a la velocidad aplicadas a un cuerpo en movimiento.

3. Si el cuerpo inicialmente se mueve con una velocidad v_0 que no es colineal con la fuerza aplicada **F**, la dirección y el módulo de la velocidad cambiarán y la partícula también adquirirá una aceleración.

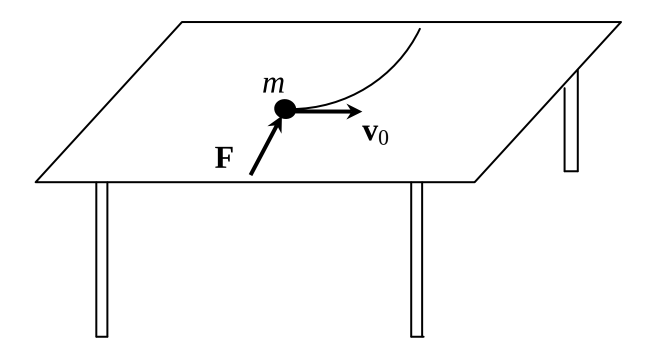


Figura 3–4 Fuerza no colineal a la velocidad actuando sobre un cuerpo en movimiento.

Lo descrito demuestra que existe una relación entre la fuerza aplicada al cuerpo y el cambio en su velocidad.

Si se realizan las experiencias descritas y se aplican diferentes fuerzas a un mismo cuerpo, se obtiene que:

$$\mathbf{a} \propto \Sigma\mathbf{F}$$

donde el símbolo $\propto$ significa "es directamente proporcional a"; en esta relación se debe entender que no solo la magnitud de la aceleración (**a**) es proporcional al módulo de la fuerza neta (total o resultante), sino que la dirección de **a** es la misma que la dirección de $\Sigma\mathbf{F}$.

Lo anterior se puede escribir así:

$$\mathbf{a} \propto \Sigma\mathbf{F} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_a = \mathbf{u}_{\Sigma F}$$

Al realizar las experiencias anteriores aplicando, en cada caso, la misma fuerza a cuerpos diferentes se concluirá que la misma fuerza neta aplicada a cuerpos diferentes produce efectos distintos.

Lo anterior indica que la fuerza resultante acelera con diferente valor a los distintos cuerpos; el valor de la aceleración depende de la resistencia que los cuerpos pongan al cambio. La propiedad de un cuerpo, de oponerse a ser acelerado se conoce como inercia del mismo.

Para entender mejor la inercia, considere el siguiente ejemplo: un hombre que está cruzando una carretera puede detener a un muchacho que está viajando a 2.5 m/s en su bicicleta; pero si intentase hacer lo mismo con un auto que se desliza a 2.5 m/s, posiblemente sería atropellado y moriría.

Por experiencia se sabe que el tamaño de un cuerpo no siempre determina su inercia, pues podría ser más fácil acelerar un gran pedazo de corcho que una roca más pequeña.

La inercia es una de las pocas propiedades elementales que no pueden expresarse en función de algo más fundamental.

La cantidad física denominada masa es la medida cuantitativa de la inercia. Entonces el resultado de la experiencia realizada al aplicar la misma fuerza neta a diferentes cuerpos puede resumirse diciendo que una misma fuerza produce mayor aceleración en un cuerpo de menor masa y viceversa. Matemáticamente las relaciones serían:

Cuando $\sum\mathbf{F} = \text{constante} \neq 0$

$$a \propto 1/m$$

de unir las expresiones anteriores se tiene

$$\mathbf{a} \propto \Sigma\mathbf{F}/m$$

o

$$\Sigma\mathbf{F} \propto m\mathbf{a}$$

Es necesario resaltar que la masa (m) es una cantidad escalar, es decir si combinamos dos objetos de masa m_1 y m_2, la masa total corresponderá a la suma de $m_1 + m_2$.

PESO Y MASA. La diferencia entre la masa de un cuerpo y su peso es motivo de confusión, por lo que es necesario aclarar que la masa es una cantidad escalar que cuantifica la inercia y el peso es una fuerza, es decir, una cantidad vectorial.

En el lenguaje común el término masa es generalmente utilizado como sinónimo de peso, por lo que se considera necesario indicar que el peso **P** es la fuerza que resulta de la atracción gravitacional de la tierra sobre la masa del cuerpo. De acuerdo con la expresión $\Sigma\mathbf{F} \propto m\mathbf{a}$, $\mathbf{P} \propto m\mathbf{g}$, donde **g** es la aceleración de la gravedad y m es la masa del cuerpo atraído por la tierra.

Interesa el peso del cuerpo en la tierra; pero, si el cuerpo pudiera estar cerca a Marte, Júpiter o a cualquier otro objeto de gran tamaño tendrá un peso diferente aunque su masa se puede considerar la misma en todos los lugares.

UNIDADES DE MASA. Al igual que otras cantidades fundamentales de la física, las unidades de la masa son determinadas al establecer un patrón arbitrario. Así la unidad arbitraria básica es el kilogramo patrón, abreviado kg.

Si bien la proporcionalidad $\Sigma\mathbf{F} \propto m\mathbf{a}$, indica que la aceleración de un cuerpo está determinada por su masa m y la fuerza neta, total o resultante $\Sigma\mathbf{F}$, es necesario transformarla en una ecuación.

Para conseguir lo propuesto se debe asegurar que las unidades en los dos lados de la ecuación sean iguales.

Como la unidad de la fuerza aún no ha sido definida, se puede determinar una que permita que la constante de proporcionalidad a ingresar en la expresión $\Sigma\mathbf{F} \propto m\mathbf{a}$, sea igual a uno.

Al realizar un análisis dimensional al término de la derecha en la expresión anterior y trabajar con las unidades del S.I. se obtiene que la unidad de fuerza llamada Newton es equivalente a 1 kg m/s^2, la constante será igual a 1 y la expresión $\Sigma\mathbf{F} \propto m\mathbf{a}$ se transformará en

$$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a} \qquad (3\text{–}3)$$

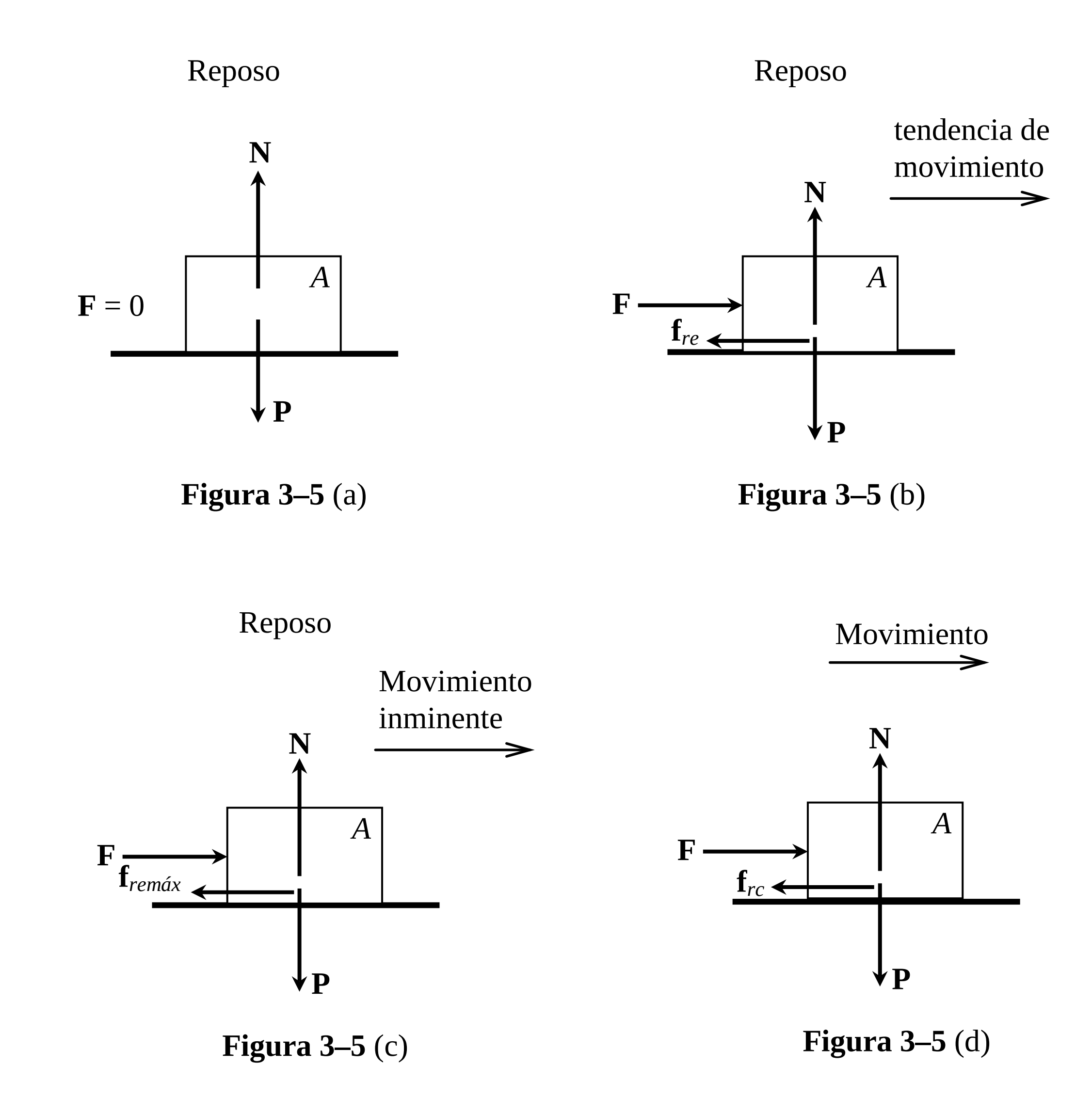
Con el objeto de sistematizar, de mejor manera la aplicación de las leyes de Newton, a situaciones concretas, se procede a establecer algunas definiciones:

DIAGRAMA DEL CUERPO LIBRE (DCL). Es un gráfico donde están dibujadas todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo analizado, debido a la acción que ejercen los alrededores sobre él; pero no deben constar las fuerzas que realiza este cuerpo sobre los demás.

TENSIÓN (**T**). Es la fuerza que se realiza sobre una partícula con ayuda de una cuerda que se considerará inextensible y de masa despreciable. Una cuerda con estas características transmite íntegramente la magnitud de la fuerza aplicada.

FUERZA NORMAL (**N**). Cuando un cuerpo de masa *m* se encuentra en reposo o movimiento sobre un plano, la componente perpendicular a las superficies en contacto de la fuerza que realiza el plano sobre el cuerpo se llama fuerza normal.

FUERZA DE ROZAMIENTO ($\mathbf{f}_r$). Cuando un bloque *A* de masa *m* se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal rugosa y se le somete a la acción de una fuerza externa horizontal **F** que tiene un módulo diferente en cada uno de los gráficos señalados a continuación, la fuerza que realiza la superficie horizontal (el piso) sobre el cuerpo tiene una componente tangencial a los cuerpos en contacto, denominada fuerza de rozamiento que se opone a la tendencia de movimiento o al movimiento del cuerpo, según el caso.



Figuras 3–5 (a) **- 3–5** (d) Diagramas del cuerpo libre de *A*

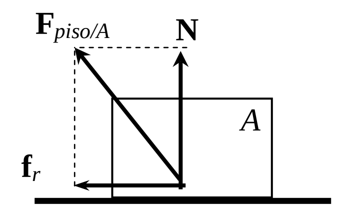


Figura 3–5 (e) Fuerza de rozamiento y normal son componentes de $\mathbf{F}_{piso/A.}$

En la Fig.3–5 (a), la fuerza **F** vale cero por tanto el cuerpo no tiene tendencia a moverse hacia ningún lado y la fuerza que realiza el piso sobre el bloque *A*, $\mathbf{F}_{piso/A}$, es la fuerza normal (**N**) perpendicular a los cuerpos en contacto.

En la Fig. 3–5 (b), al tener **F** un valor diferente de cero, pero no suficiente para mover al cuerpo, este adquiere una tendencia de movimiento hacia la derecha y la fuerza $\mathbf{F}_{piso/A}$ tiene una componente tangencial de dirección contraria a **F**, denominada fuerza de rozamiento estática ($\mathbf{f}_{re}$); la otra componente perpendicular al plano es la fuerza normal.

En la Fig. 3–5 (c), el valor de **F** es diferente de cero y capaz de llevar al cuerpo al movimiento inminente (a punto de moverse), la componente tangencial de la fuerza $\mathbf{F}_{piso/A}$, ya definida como fuerza de rozamiento estática, toma su máximo valor y es proporcional a la fuerza normal ($f_{remáx} \; \alpha \, N$).

En la Fig. 3–5 (d), la fuerza exterior **F** logra que el bloque se ponga en movimiento; en este caso la componente tangencial de la fuerza $\mathbf{F}_{piso/A}$ se llama fuerza de rozamiento cinética y su valor se considera constante y proporcional a la fuerza normal ($f_{rc} \; \alpha \, N$).

Las proporciones anteriores se convierten en igualdades con los coeficientes de rozamiento estático y cinético respectivamente, cuyos valores dependen del material que forma los cuerpos, del acabado de sus superficies (grado de rugosidad) y del estado de movimiento inminente o de movimiento del cuerpo.

La $f_{remáx} = \mu_e N$ y $f_{rc} = \mu_c N$ donde μ_e es el coeficiente de rozamiento estático y μ_c es el coeficiente de rozamiento cinético. Para las mismas superficies en contacto $\mu_e > \mu_{c.}$

De lo anterior se determina que la magnitud de $\mathbf{f}_{re}$ es variable; que puede cambiar entre los siguientes límites $0 \le f_{re} \le \mu_e N$, y que la fuerza $\mathbf{f}_{rc}$ es prácticamente constante.

Para comprender mejor el uso de la Segunda Ley de Newton, a continuación se realizan algunos ejemplos.

Ejemplo 1.Un bloque *A* de peso **P**, se deja caer libremente desde una altura *h*; como se indica. Sin considerar la resistencia del aire y con ayuda de la segunda Ley de Newton demostrar que $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$.

La Fig. 3–6 muestra el diagrama del cuerpo libre de *A*, en las diferentes posiciones, durante su caída. La única fuerza que actúa sobre él es su peso **P**, si se considera que no existe resistencia del aire.

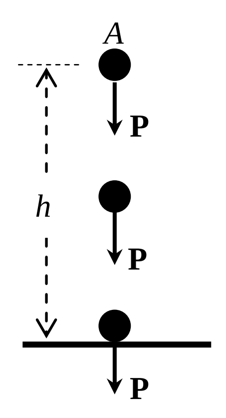


Figura 3–6 Diagrama del cuerpo libre de *A*

Al utilizar la segunda Ley de Newton, se tendrá:

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Galileo encontró que la aceleración que tienen los cuerpos en caída libre, es decir sin considerar la resistencia del medio, es igual a la aceleración de la gravedad **g**, entonces:

$$\mathbf{P} = m\mathbf{g}$$

El resultado de esta demostración, $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$, es muy importante porque no es necesario que el cuerpo sea acelerado en caída libre para que $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$ sea válida.

Inclusive si el bloque se encuentra en reposo sobre una superficie cualquiera, su peso será $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$ y su masa *m*.

La influencia de la Tierra sobre el cuerpo *A* genera la aceleración de la gravedad **g**, sin embargo si el cuerpo se encuentra bajo la influencia de otro planeta, el peso del cuerpo será $\mathbf{P} = m\mathbf{g}_P$, donde $\mathbf{g}_P$ es la aceleración de la gravedad en ese planeta.

Ejemplo 2. En el sistema de la Fig. 3–7, considere que el rozamiento entre todas las superficies en contacto es despreciable, y determine la aceleración de los cuerpos *A* y *B*. Suponga que $m_A > m_B$.

Solución. En el problema planteado se debe primero identificar las fuerzas que actúan sobre los cuerpos *A* y *B*, reconocer si son constantes o variables y si los cuerpos pueden ser considerados como partículas.

Para determinar las fuerzas que actúan sobre las masas puntuales *A* y *B* se debe identificar a los cuerpos que actúan sobre ellas y conocer la fuerza que cada uno produce, siempre y cuando la fuerza sea representativa.

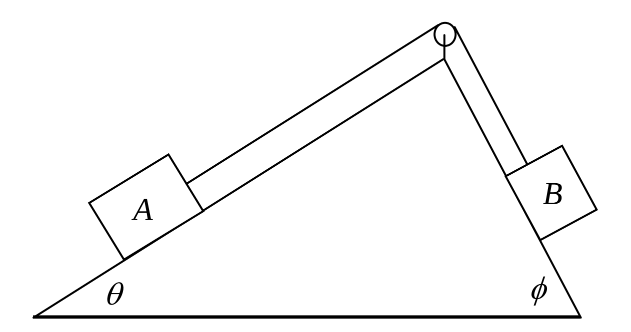


Figura 3–7 Sistema de masas *A, B*

El siguiente cuadro ejemplifica lo sugerido para el cuerpo *A*

Cuerpo actuante	Fuerza aplicada sobre *A*
Tierra	Peso (**P**)
Plano inclinado	Normal (**N**)
Cuerda	Tensión (**T**)

Una vez identificadas las fuerzas que actúan sobre la masa puntual, se las representa en el diagrama de cuerpo libre (DCL) Estos diagramas se indican en las Figs. 3–8 (a) y 3–8 (b) para las masas puntuales *A* y *B*.

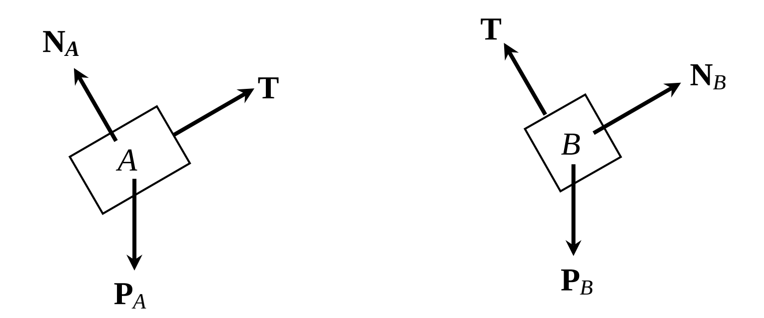


Figura 3–8 (a) DCL de *A* **Figura 3–8** (b) DCL de *B*

De aplicar la segunda ley de Newton a cada una de las masas se tiene:

$$\sum F_A = m_{A.}\, a_A$$

$$\sum F_B = m_{B.} a_B$$

Para realizar el $\sum$**F** se requiere expresar todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo con los unitarios **i**, **j**, **k** para lo cual es necesario elegir un sistema de referencia adecuado y realizar la descomposición de las fuerzas que no coinciden con los ejes del sistema de referencia como indican las Figs. 3–9 (a) y 3–9 (b). Para este ejemplo se toma *x* paralelo a **T** en los dos casos.

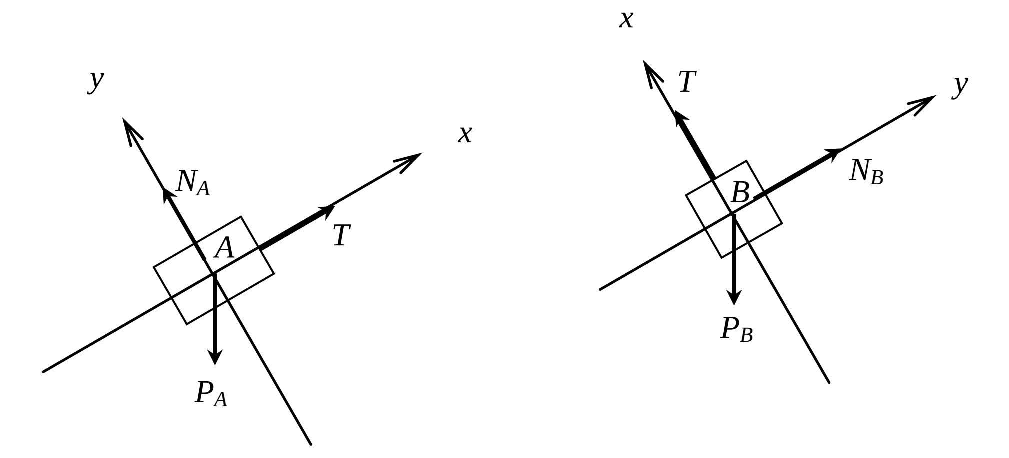


Figura 3–9 (a) DCL de *A* **Figura 3–9** (b) DCL de *B*

El valor de la tensión **T** en la cuerda que actúa sobre los bloques *A* y *B* es el mismo por tratarse de una cuerda de masa despreciable e inextensible.

La polea del sistema también es de masa despreciable, su tamaño no se toma en cuenta y el rozamiento entre la cuerda y la polea es cero; en estas condiciones el único papel que desempeña la polea es cambiar la dirección de la tensión **T** que actúa sobre *A* y *B*.

Como en el eje *y* los dos cuerpos están en equilibrio $\sum \mathbf{F}_Y = 0$.

Al realizar la suma de fuerzas en el eje *x* para los cuerpos *A* y *B*, se tiene:

$$m_A\, g \text{ sen } \theta - T = m_A\, a_A$$

$$T - m_B\, g \text{ sen } \phi = m_B\, a_B$$

Si la cuerda que une *A* y *B* es inextensible, la distancia recorrida por cada uno de los cuerpos en un mismo tiempo es igual; por lo tanto se puede deducir que $a_A = a_B$. Para facilitar la solución del problema las aceleraciones de los cuerpos se reemplazan por *a*.

Al resolver las ecuaciones anteriores se obtiene la aceleración de los cuerpos

$$a = (m_B\, g \text{ sen } \phi - m_A\, g \text{ sen } \theta)/(m_A + m_B)$$

Ejemplo 3. Un bloque de masa *m* se gira en sentido antihorario en una trayectoria circular, localizada en un plano vertical, atado a una cuerda de longitud *L* alrededor de un eje fijo que pasa por el extremo *O* de la cuerda. En un instante determinado el bloque pasa por el punto *A* con una velocidad $\mathbf{v}_A$ como se indica en la Fig. 3–10, determine la tensión de la cuerda en *A*. No considere la resistencia del aire.

Solución. Para resolver este problema realizamos el diagrama de cuerpo libre en *A* y se elige el sistema de referencia *x´y´*, donde *x´* es el eje tangencial que pasa por *A* y *y´* el eje radial que pasa por el centro de la trayectoria circular.

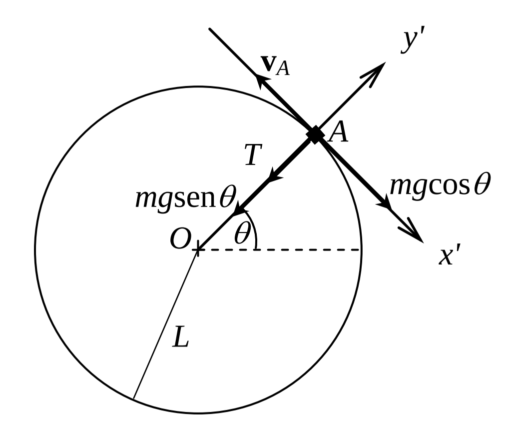


Figura 3–10 DCL del bloque en el instante que pasa por *A*

Para plantear la ley de Newton es necesario descomponer las fuerzas en los ejes del sistema de referencia elegido; en este caso $mg\text{sen}\theta$ se encuentra en el eje radial $y´$ mientras que $mg\cos\theta$ está en el eje tangencial $x´$.

La resultante de las fuerzas localizadas en el eje normal, dirigida hacia el centro de curvatura se llama fuerza centrípeta, normal o radial; de tal forma que la suma de las fuerzas en este eje nos proporciona la fuerza resultante necesaria para que el cuerpo continúe en la trayectoria de radio *L*, así:

$$\sum F_{cA} = ma_{cA}$$

$$T + mg \text{ sen } \theta = ma_{cA}$$

Esta fuerza resultante $\sum \mathbf{F}_{cA}$ es igual a ma_{cA}, donde a_{cA} es la aceleración centrípeta en el movimiento circular que se puede reemplazar por v_A^2 /L.

Al realizar la suma de fuerzas en el eje tangencial $x´$, la fuerza resultante $mg\cos\theta$ genera la aceleración tangencial $\boldsymbol{a}_T$, que hace disminuir la rapidez del cuerpo mientras está subiendo por la trayectoria.

$$\sum F_{TA} = ma_T$$

$$mg\cos\theta = ma_T$$

$$g\cos\theta = a_T$$

Se puede observar que la magnitud de la aceleración tangencial a_T es variable porque depende del ángulo θ, entonces el movimiento de este cuerpo no es uniformemente variado.

De la ecuación: $T + mg\text{sen}\theta = ma_{cA}$, la tensión en la cuerda es igual a:

$$T = m\,(v_A^2 /L) - mg\text{sen}\theta$$

Tercera Ley de Newton

De observaciones rutinarias en nuestras actividades diarias, se puede concluir que la fuerza que actúa sobre un cuerpo, es realizada por otro. Por ejemplo al patear un balón de fútbol que está en reposo o movimiento el cambio en su velocidad, tiene su origen en el contacto del balón con el pie del jugador; de la misma manera, la fuerza que hace ingresar un clavo en un bloque de madera viene del martillo con que se golpea, etc.

Si se pusiera más atención a acciones cotidianas como el presionar o estirar un resorte con la mano, arrimarse a una pared apoyando la mano, halar un cuerpo por medio de una cuerda, etc. nos daríamos cuenta, en tales casos, que simultáneamente a la fuerza que hacemos sobre los objetos antes indicados, éstos también ejercen una fuerza sobre nuestra mano. Estos fenómenos son los que explica la tercera ley de Newton al establecer que la existencia de la fuerza está ligada a la interacción entre dos cuerpos *A* y *B*. Esto es, *A* realiza una fuerza ($\mathbf{F}_{A/B}$) que actúa sobre *B*, y *B* realiza otra ($\mathbf{F}_{B/A}$) que actúa sobre *A*, como muestra la Fig. 3–11.



Figura 3–11 Fuerzas de acción y reacción

Por lo expuesto, en el ejemplo, del balón se tendría que al interactuar el pie del jugador con el balón, sobre este actúa una fuerza producida por el pie del jugador que interactuó con él (**F**), pero sobre el pie del jugador actúa una fuerza producida por el balón ($\mathbf{F}^{\cdot\cdot}$), como muestra la Fig. 3–12 (a). De igual manera en el ejemplo del clavo sobre él actúa una fuerza producida por el martillo ($\mathbf{F}_1$) **y** sobre este actúa una fuerza producida por el clavo ($\mathbf{F}_1^{\cdot\cdot}$), como muestra la Fig. 3–12 (b).



Figura 3–12 (a) Interacción pie-balón



Figura 3–12 (b) Interacción martillo-clavo

Lo expuesto se formaliza en el enunciado de la tercera ley de Newton (ley de acción y reacción), misma que entre otras, tiene las siguientes expresiones:

- Si un cuerpo *A* ejerce una fuerza sobre un cuerpo *B*, entonces *B* ejerce una fuerza de igual magnitud y dirección contraria sobre *A*, a lo largo de la misma línea de acción.
- A cada acción corresponde una reacción igual y opuesta.

En este punto es importante establecer las siguientes preguntas:

1. ¿Qué caracteriza a un par de fuerzas de acción y reacción?
2. ¿Cómo determinar cuál fuerza es la acción y cuál es la reacción?
3. Cuál fuerza se origina primero ¿la acción o la reacción?
4. Una vez conocida una de las fuerzas, la acción por ejemplo ¿cómo se determina la reacción?
5. ¿Por qué no se anulan las fuerzas de acción y reacción?
6. ¿Las fuerzas de acción y reacción producen aceleraciones iguales?

La respuesta a la primera pregunta se puede extraer de la lectura detenida del primer enunciado de la Tercera Ley de Newton esto es, las fuerzas actúan sobre cuerpos diferentes, son de igual magnitud y tienen direcciones contrarias.

Para aclarar las dos preguntas siguientes, se debe indicar que el significado de los términos acción y reacción en la Tercera Ley no es el del lenguaje común; esto es, que toda reacción se da luego de una acción. Así, el dejar de hablarle a un amigo es la reacción a un insulto que él realizó. Primero me insultó - acción - y luego yo dejo de hablar con él - reacción -. El sentido físico de la acción y reacción es de simultaneidad. Las fuerzas de acción y reacción se realizan en el mismo instante de tiempo, por tanto no es importante a cual llamo acción y a cual reacción.

Si se ha entendido que la acción y reacción son el resultado de la interacción entre dos cuerpos *A* y *B* y que actúan en cuerpos diferentes - la una sobre *A* y la otra sobre *B* - es fácil entender que al no actuar sobre un mismo cuerpo no pueden anularse y que si conozco que *A* ejerce una fuerza sobre *B*, entonces la descripción de la fuerza de reacción es simplemente que el objeto *B* ejerce una fuerza sobre el objeto *A*.

Ejemplo 4. Demuestre que el peso **P** de una caja que se encuentra en reposo y la fuerza normal **N** que realiza el tablero de la mesa, sobre la que se encuentra, no son un par de fuerzas de acción y reacción.

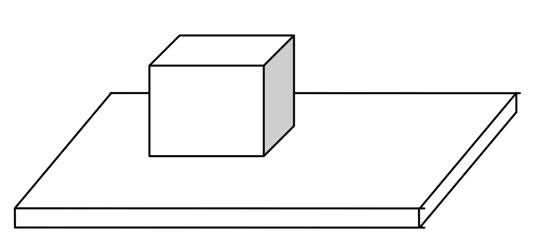


Figura 3–13 (a) Sistema cuerpo - piso

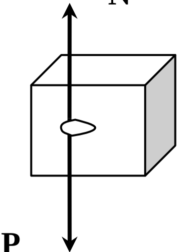


Figura 3–13 (b) DCL del cuerpo

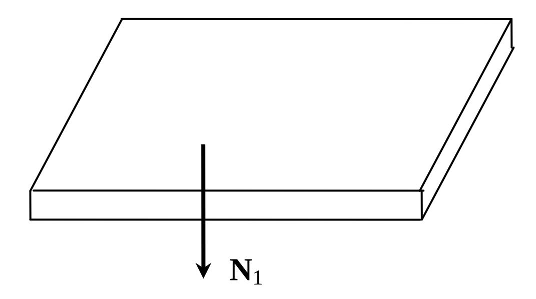


Figura 3–13 (c) DCL del piso

Si la caja se encuentra en reposo por la segunda ley de Newton la suma de la fuerza **P** y **N** dibujadas en la Fig. 3–13 (b) (generadas por la tierra y la mesa) es igual a cero.

$$\mathbf{P} + \mathbf{N} = 0$$

$$\mathbf{P} = -\mathbf{N}$$

Pero no son par de acción y reacción de las que habla la tercera ley de Newton pues actúan sobre el mismo cuerpo.

Si se quiere identificar la reacción a la fuerza **N** realizada por la mesa sobre la caja, se tendrá que graficar la fuerza realizada por la caja sobre la mesa, esta corresponde a $\mathbf{N}_1$ en la Fig. 3–13 (c), esto indica que la reacción a **N** es $\mathbf{N}_1$ y no **P**.

Se sugiere que el estudiante como ejercicio encuentre cuál es la reacción a la fuerza **P**

Finalmente, es importante recalcar que el par de acción y reacción, son fuerzas que se generan por interacción entre cuerpos, este concepto no es aplicable a fuerzas obtenidas como suma o descomposición de otras.

Sugerencia: explique por qué el caminar sobre hielo es más difícil que en pavimento.

3.4 ECUACIÓN IMPULSO – CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL (CML), PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE LA CML

Cantidad de movimiento lineal

De acuerdo con la segunda ley de Newton, se tiene que $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

Con esta ecuación, se puede caracterizar el estado dinámico de la partícula, considerando que esta, al acelerarse, parte con una velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ y, luego de transcurrido cierto intervalo de tiempo Δt, llega a tener una velocidad **v**, es decir:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}\,\Delta t. \qquad (3\text{–}4)$$

Despejando **a** de esta ecuación y reemplazando en $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ se tiene:

$$\Sigma\mathbf{F} = m\,(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) / \Delta t$$

$$\Sigma\mathbf{F} = (m\mathbf{v} - m\mathbf{v}_0) / \Delta t$$

Al producto de la masa por la velocidad se denomina cantidad de movimiento lineal o momentun lineal y se denota con **p**, es decir que:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \qquad (3\text{–}5)$$

y sus unidades son kgm/s.

Al reemplazar el valor de **p** en la ecuación anterior se tiene:

$$\Sigma \mathbf{F} = (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) / \Delta t$$

Donde que $\mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = \Delta \mathbf{p}$, con lo que:

$$\Sigma \mathbf{F} = (\Delta \mathbf{p}) / \Delta t \qquad (3\text{–}6)$$

Al despejar, en esta ecuación, el valor de $\Delta \mathbf{p}$, se tiene que:

$$\Sigma \mathbf{F}\, \Delta t = \Delta \mathbf{p}$$

Donde el valor $\Sigma \mathbf{F} \Delta t$ se define por el impulso lineal **I,** de tal manera que:

$$\mathbf{I} = \Delta \mathbf{p} \qquad (3\text{–}7)$$

Si se reemplaza en la ecuación anterior el valor de $\Delta \mathbf{p}$, considerando que la masa es constante, se tiene que:

$$\mathbf{I} = m\mathbf{v} - m\mathbf{v}_0$$

Al analizar la última ecuación se concluye que el impulso no está relacionado con la aceleración sino con la velocidad inicial y final; en cambio, cuando se dice $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$, se habla de cantidades instantáneas; la aceleración instantánea está relacionada con las fuerzas actuantes sobre el cuerpo, en ese instante.

Esta diferencia es de gran importancia en los problemas en los que no se conoce como varían las fuerzas; pero, sí se conocen sus velocidades inicial y final. Un buen ejemplo sobre esta situación se produce en los choques, en los que no se sabe la magnitud de la fuerza que ejerce un cuerpo sobre otro o de cómo cambian las fuerzas durante la colisión.

El momentun lineal o cantidad de movimiento lineal proporciona mayor información que la velocidad sobre las características del movimiento, por el hecho de ser una cantidad dinámica, por ejemplo, con este nuevo concepto fácilmente se puede deducir que es más difícil detener o aumentar la velocidad de un camión cargado en movimiento, que la de uno vacío, aún si la velocidad inicial fuera la misma para los dos.

Principio de conservación de la cantidad de movimiento lineal

Ahora, es importante señalar que si en la ecuación $\Sigma \mathbf{F} \Delta t = \Delta \mathbf{p}$ se tiene que $\Sigma \mathbf{F} = 0$, entonces $\Delta \mathbf{p} = 0$, lo que significa que **p** inicial será siempre igual al final, para cualquier intervalo de tiempo; es decir, **p** se conserva. Esta expresión representa el principio de conservación de la cantidad de movimiento lineal o momentun lineal.

3.5 SISTEMAS DE PARTÍCULAS

Muchas situaciones en la física deben ser analizadas considerando un sistema de varias partículas, a fin de comprender y analizar de mejor manera el comportamiento de elementos más complejos que una partícula. Si se recuerda que una de las restricciones de las leyes de Newton es que son aplicables a una partícula, al querer analizar un sistema de partículas con ellas, se debe superar dificultades como las de definir adecuadamente su posición respecto a un sistema de referencia, con lo cual muchas predicciones quedarían restringidas, y eso es justamente lo que no se quiere.

Se define como sistema de partículas al conjunto de puntos o cuerpos materiales que pueden interactuar entre sí y también con cuerpos que no forman parte del sistema considerado.

Centro de masa

Para evitar el análisis independiente de cada una de las partículas del sistema, se crea el concepto de centro de masa que permite representar idealmente toda la masa en una sola posición. Esta idea no solo es válida para una distribución de masas sino también para cuerpos extensos, como por ejemplo considerar la masa de la Tierra concentrada en su centro, suponiendo que su masa se encuentra uniformemente distribuida.

Físicamente, el centro de masa representa un punto en el que se puede asumir concentrada toda la masa de un cuerpo para determinar el movimiento traslacional (lineal) del mismo.

Por lo tanto la segunda ley de Newton para un sistema de varios cuerpos se puede escribir de la siguiente manera:

$$\Sigma \mathbf{F} = M\,\mathbf{a}_{CM} \qquad (3\text{–}8)$$

Sistema de dos partículas

Analice el sistema de partículas más simple, que es el formado por dos masas m_1 y m_2, asociadas mediante radios vectores $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$, como se indica en la Fig. 3–14.

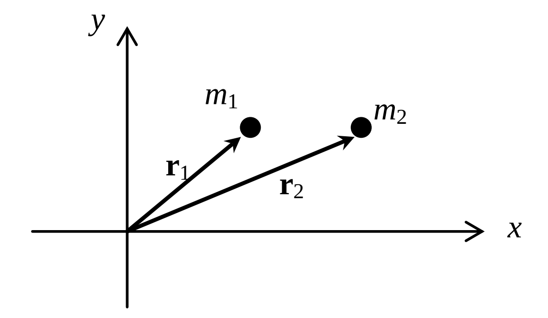


Figura 3–14 Sistema formado por dos masas

En este caso se debe suponer que la masa total será $M = m_1 + m_2$ y que estará ubicada en un punto llamado centro de masa, cuya posición depende de $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$, tal como se indica en la Fig. 3–15.

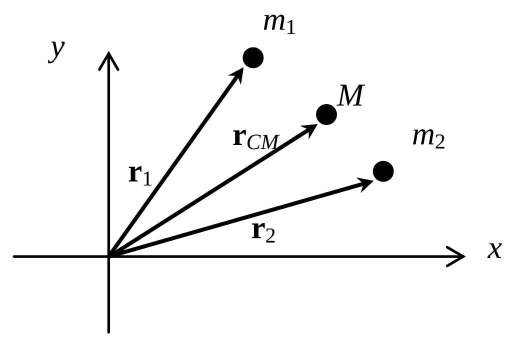


Figura 3–15 Posición del centro de masa de un sistema de dos masas

Posición velocidad y aceleración del centro de masa

La posición de esta masa *M*, que representa la masa total, se llamará $\mathbf{r}_{CM}$ y viene dada por la ecuación:

$$\mathbf{r}_{CM} = (1/M)(m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2) \qquad (3–9)$$

Es decir, en este punto, ubicado por el vector posición del centro de masa se puede suponer concentrada toda la masa *M* del sistema.

Ahora, si se supone que cada una de las masas se mueve con cierta velocidad $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, la velocidad del centro de masa se podrá determinar mediante la siguiente ecuación:

$$\mathbf{v}_{CM} = (1/M)(m_1\mathbf{v}_1+m_2\mathbf{v}_2) \qquad (3–10)$$

De igual manera la aceleración del centro de masa viene dada por:

$$\mathbf{a}_{CM} = (1/M)(m_1\mathbf{a}_1+m_2\mathbf{a}_2) \qquad (3–11)$$

Centro de gravedad

Es importante anotar también otro concepto que es el centro de gravedad, el mismo que representa el lugar en donde se siente todo el efecto de la atracción gravitacional. Se debe indicar que el centro de masa no siempre coincide con el centro de gravedad, esto sólo sucede cuando un cuerpo se encuentra en un campo gravitacional uniforme, por ejemplo una regla en equilibrio ubicada sobre un soporte, en este caso el centro de gravedad y el centro de masa coincidirán con el centro geométrico de la regla, no así en una montaña, el centro de masa y el centro de gravedad no se encuentran en un mismo lugar, pues en este caso el campo gravitacional no es uniforme desde la base hasta la cumbre de la montaña, el centro de gravedad esta ubicado por debajo del centro de masa.

3.6 TORQUE Y DINÁMICA ROTACIONAL

Con el propósito de analizar los efectos que produce una fuerza resultante sobre un cuerpo rígido (se entiende por cuerpo rígido aquel que no se deforma por la acción de una fuerza y cuyas dimensiones físicas y distribución de masa no puede despreciarse en el análisis del movimiento), se considera una varilla de masa despreciable, en la que se ha soldado una masa en un extremo y gira sobre el otro, apoyada en una superficie horizontal sin rozamiento. Sobre la masa soldada a la varilla actúa una fuerza resultante horizontal **F,** como se muestra en la Fig. 3–16.

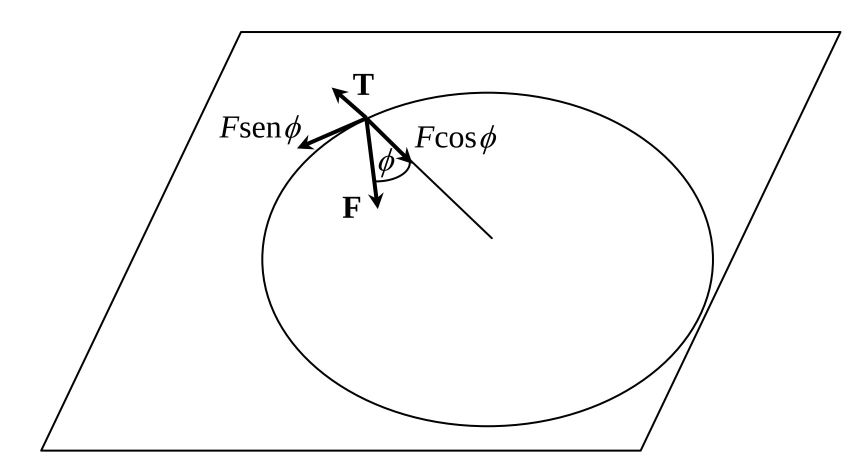


Figura 3–16 Masa unida a una varilla que rota sobre una superficie horizontal sin rozamiento

La masa, unida al extremo de la varilla, está sometida a la acción de la fuerza **T** que sobre ella realiza la varilla, de su peso y de la fuerza normal, que ejerce sobre ella la superficie horizontal y lisa.

Al considerar un sistema cartesiano, en el que el eje x es paralelo a la varilla y el eje y perpendicular a la misma, y al aplicar la segunda ley de Newton sobre la masa, soldada a la varilla, se tiene:

En el eje x dirigido al centro de rotación (normal):

$$T - F\cos\phi = 0 \quad \text{(mientras la partícula continúa en reposo)}$$

En el eje y perpendicular al radio (tangencial):

$$F\,\text{sen}\,\phi = ma_T$$

$$a_T = F\,\text{sen}\,\phi / m$$

si se reemplaza $\alpha r = a_T$, se tiene:

$$\alpha = F\,\text{sen}\,\phi / mr$$

al multiplicar los dos miembros de la fracción por r se obtiene

$$\alpha = Fr\,\text{sen}\,\phi / mr^2 \qquad (3\text{–}12)$$

Es importante establecer que las expresiones Fr sen ϕ y mr^2 representan el módulo del torque (τ) y el momento de inercia o inercia rotacional de una partícula (I), respectivamente. El momento de inercia es una propiedad de los cuerpos para oponerse a ser acelerados angularmente.

$$\tau = Fr \text{ sen } \phi$$

$$I_{partícula} = mr^2$$

Torque

Al analizar detenidamente la expresión

$$Fr \text{ sen } \phi = \tau$$

y aplicando la definición de producto vectorial de dos vectores **F** y **r,** que representan el valor de los vectores fuerza y posición del punto de aplicación de la fuerza en, relación al eje de rotación, se tiene que

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \qquad (3\text{–}13)$$

De esta expresión, se concluye que el torque es un vector, perpendicular al plano formado por los vectores **F** y **r,** cuyo valor depende de la fuerza aplicada, de la posición de su punto de aplicación respecto al centro de giro del cuerpo y el ángulo formado por estos dos vectores.

A fin de comprender mejor el concepto de torque, se plantea las siguientes preguntas que deberán ser resueltas por el estudiante:

1. Si usted quiere abrir una puerta, aplicando con su mano la menor fuerza posible sobre la perilla ubicada en el extremo de la misma, ¿con qué ángulo en, relación a la puerta, aplica la fuerza? Explique su respuesta.

2. ¿Qué principio físico se usa al añadir un tubo al mango de una llave inglesa para aflojar una tuerca, cuando esto no ha sido posible realizarlo ejerciendo la fuerza directamente sobre el mango de la llave? Explique.

UNIDADES DEL TORQUE: En el S.I. las unidades del torque vienen dadas en mN.

Inercia rotacional o momento de inercia

Como se estableció anteriormente, la primera ley de Newton dice que todos los cuerpos tienden a estar en reposo o moverse en línea recta, con velocidad constante. En la práctica encontramos que existe una ley similar para la rotación.

Todo objeto en rotación, permanece girando hasta que un agente externo (torque), modifique dicho estado. De aquí, se puede hablar que un cuerpo en rotación tiene cierta "inercia de rotación o momento de inercia".

Para movimientos rotacionales en los cuales el eje de rotación es fijo, el momento de inercia es considerado como un escalar positivo y sus dimensiones son (ML^2). Este caso particular es el que se trata en el presente capítulo.

En ausencia de un torque neto o total, los cuerpos rígidos en rotación permanecen en rotación con velocidad angular constante (sin aceleración angular) y los cuerpos rígidos que no giran permanecen sin girar.

A diferencia de la inercia de traslación, que solamente depende de la masa, la inercia de rotación o momento de inercia depende tanto de la masa, como de su distribución (o sea de su geometría). Cuanto mayor sea la distancia entre la mayor parte de la masa de un objeto y el eje alrededor del cual se efectúa la rotación, mayor será su momento de inercia.

Los cuerpos que tienen la mayor parte de su masa hacia su periferia, una vez puestos en rotación, son más difíciles de detener, que aquellos cuya masa está más cerca al eje, puesto que tienen mayor inercia rotacional.

Como consecuencia de lo expuesto, una patinadora tiene gran inercia rotacional cuando gira sobre una de sus piernas y mantiene los brazos abiertos y la otra pierna estirada en el aire, por lo que rotará más lentamente que cuando se encoge en posición vertical. En posición vertical, con sus brazos pegados al cuerpo, la masa queda muy cerca del eje de rotación por lo que disminuye su momento de inercia y aumenta significativamente su velocidad angular.

La inercia rotacional, respecto al eje de giro, por ejemplo, de un péndulo largo es mayor que la de un péndulo corto. El péndulo largo es más "perezoso", por lo que se mueve, de un lado a otro, más lentamente que un péndulo corto.

Como se estableció anteriormente, cuando toda la masa de un objeto se encuentra concentrada a la misma distancia del eje de rotación, como en el caso de una partícula, el momento de inercia es $I = m\,r^2$. Para el caso de un sistema de partículas que gira alrededor de un solo punto "O", como se muestra en la Fig. 3–17, el momento de inercia será I_O:

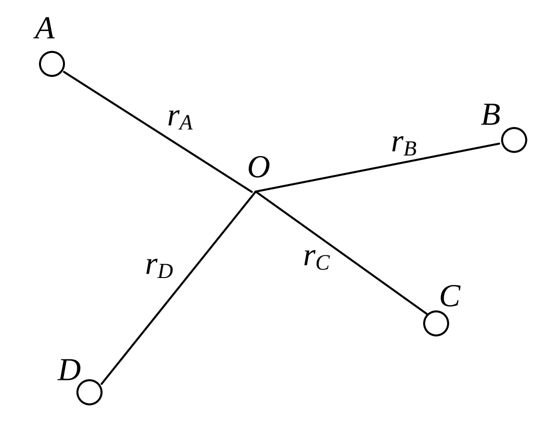
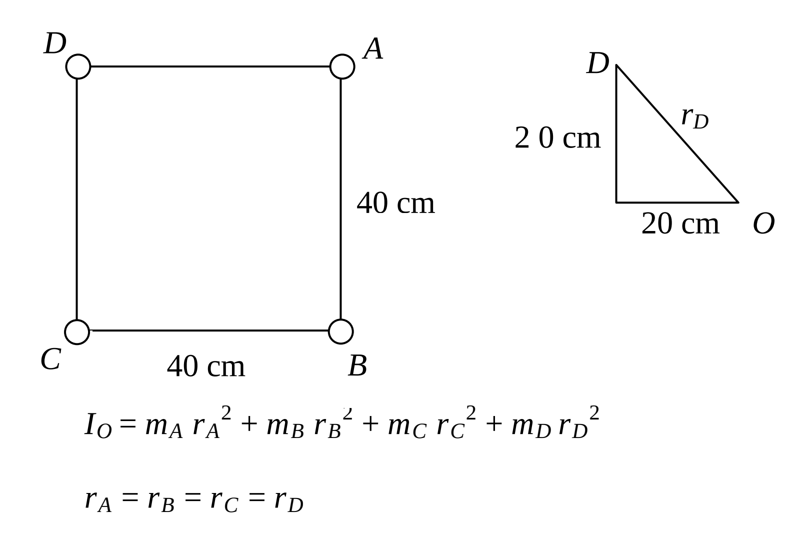


Figura 3–17 Sistema de partículas que gira alrededor del punto *O*

$$I_O = m_A\, r_A^2 + m_B\, r_B^2 + m_C\, r_C^2 + m_D\, r_D^2 = \Sigma m_i\, r_i^2 \quad (3\text{–}14)$$

El subíndice $_O$ expresa que todas las partículas giran alrededor del punto "*O*".

Ejemplo 5. Cuatro pequeños cuerpos, considerados como partículas, están unidos por barras rígidas de masa despreciable, como muestra la Fig. 3–18. ¿Cuál es el momento de inercia del sistema, respecto a un eje perpendicular al plano de la figura, que pasa por el centro geométrico de la figura? Se conoce que m_A = 10 g, m_B = 20 g, m_C = 30 g, m_D = 40 g.



$$I_O = m_A\, r_A^2 + m_B\, r_B^2 + m_C\, r_C^2 + m_D\, r_D^2$$

$$r_A = r_B = r_C = r_D$$

Si el punto *O* coincide con el corte de las diagonales,

$$r_D^2 = (20^2+20^2)\ \text{cm}^2 = 800\ \text{cm}^2, \text{ entonces:}$$

$$I_O = 10\cdot 800\ \text{gcm}^2 + 20\cdot 800\ \text{gcm}^2 + 30\cdot 800\ \text{gcm}^2 + 40\cdot 800\ \text{gcm}^2$$

$$= (10+20+30+40)\cdot 800\ \text{gcm}^2 = 80.000\ \text{gcm}^2$$

UNIDADES DEL MOMENTO DE INERCIA O INERCIA ROTACIONAL: En el sistema internacional son kgm^2.

Inercia rotacional de cuerpos extensos

Para el caso de un cuerpo extenso (condición a que pertenecen la mayor parte de los cuerpos comunes), que no puede ser considerado como partícula ni como un sistema de partículas; pero sí como una distribución continua de masa, se utilizan procedimientos matemáticos adecuados, con los cuales se concluye que:

$$I_O = cml^2. \quad (3\text{–}15)$$

Donde *c* es una constante, que depende de la forma geométrica del cuerpo y de la posición del eje de rotación seleccionado, que pasa por el centro de rotación *O*, *m* la masa del cuerpo que se encuentra en rotación y *l* una dimensión característica del cuerpo.

A continuación se presenta una tabla con las ecuaciones para el cálculo de momento de inercia de algunos cuerpos extensos.

Objeto	Fórmula
Péndulo simple	$I = mr^2$
Aro que gira alrededor de su eje normal	$I = mr^2$
Aro que gira alrededor de un diámetro	$I = ½mr^2$
Cilindro sólido	$I = ½mr^2$
Varilla que gira alrededor de su centro de gravedad*	$I = ½mL^2$
Varilla que gira alrededor de uno de sus extremos*	$I = 1/3mL^2$
Esfera sólida que gira alrededor de su centro	$I = 2/5mr^2$

* *L:* longitud de la varilla

Torque y aceleración angular

Al reemplazar en la Ec. (3–12) los valores del torque, del momento de inercia y como el torque es un vector, se tiene:

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\tau}/I \qquad (3\text{–}16)$$

De esta ecuación, se concluye que el torque produce una aceleración angular a la partícula, en tanto esta gira soldada a la varilla a una distancia *r* del centro de rotación; es decir, en general, el torque es capaz de producir una aceleración angular en el cuerpo, que tiene el mismo unitario del torque y su valor es directamente proporcional al valor de este e inversamente proporcional al valor de la inercia rotacional.

A partir de esta relación se afirma que el torque es positivo cuando produce una aceleración angular en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj y negativo, si la aceleración angular es en sentido horario.

Ecuación general de la dinámica rotacional

La Ec. (3–16) expresa que la aceleración angular de una partícula, que gira alrededor de un eje fijo, es proporcional al momento de torsión que actúa alrededor de ese eje o que el momento de torsión, que actúa sobre la partícula, es proporcional a la aceleración angular, y la constate de proporcionalidad es el momento de inercia. Nótese que $\boldsymbol{\tau} = I\boldsymbol{\alpha}$ es el análogo de la segunda ley de Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, para la rotación.

Dado que sobre un cuerpo rígido, usualmente, actúan varias fuerzas y cada una de ellas produce un torque, es necesario referir que el torque producido por todas las fuerzas, se denomina torque resultante o neto, por lo que generalmente la Ec. (3–16) se expresará como:

$$\boldsymbol{\alpha} = \Sigma\, \boldsymbol{\tau} / I \qquad (3\text{–}17)$$

Donde $\Sigma\,\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{neto}$ es el torque total, respecto a un eje de rotación, que actúa sobre el cuerpo rígido; I es el momento de inercia del cuerpo rígido, sobre el cual actúa el torque; y, $\boldsymbol{\alpha}$ la aceleración angular del cuerpo rígido en rotación.

La Ec. (3–17), por tanto, expresa que el torque neto respecto a un eje de rotación es proporcional a la aceleración angular del cuerpo. El momento de inercia es el factor de proporcionalidad, el cual depende del eje de rotación, del tamaño y forma del cuerpo, básicamente.

Ejemplo 6. El volante, de radio *R*, masa *M* y momento de inercia *I*, se instala sobre un eje sin fricción, como muestra la siguiente figura. Una cuerda ideal, enrollada alrededor del volante, sostiene un cuerpo de masa *m*. Determine a) la aceleración angular del volante, b) la aceleración de la masa suspendida y c) la tensión de la cuerda de la que suspende el cuerpo.

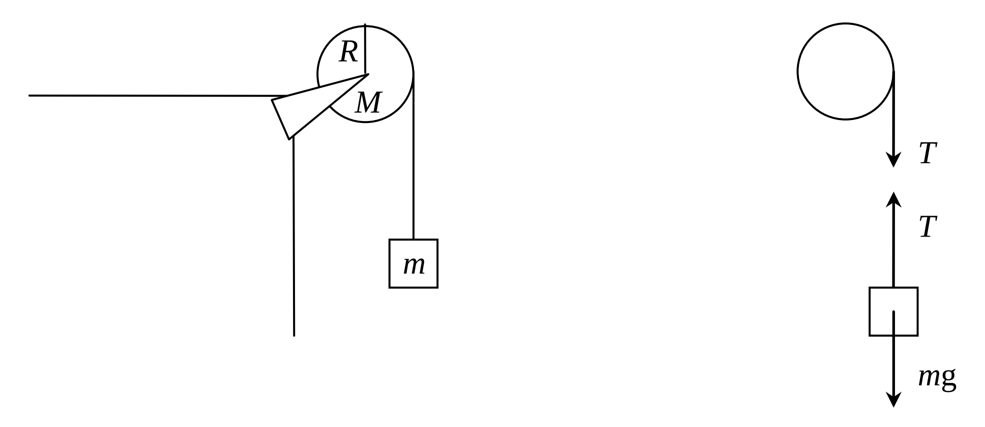


Figura 3–19 Rotación de un volante, de radio *R*.

a) $\Sigma\,\boldsymbol{\tau} = I\boldsymbol{\alpha}$

$\Sigma\,\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_T = -TR\,\mathbf{k}$

$-TR\,\mathbf{k} = I\boldsymbol{\alpha}$

$\boldsymbol{\alpha} = -\,(TR/I)\,\mathbf{k}$

b) $\Sigma\,F\text{y} = -\,T + mg = ma_y = ma$

$a = (mg - T)\,/\,m$

$\mathbf{a} = -\,[(mg - T)\,/\,m]\,\mathbf{j}$

c) Como la aceleración de la masa suspendida es igual a la aceleración tangencial, en un punto de la periferia del volante, y dado que $a = \alpha R$ se tiene:

$a = \alpha R = TR^2/\,I = (mg - T)\,/\,m$

$T = mgI\,/\,(I + mR^2)$

$\mathbf{T} = mgI\,/\,(I + mR^2)\,\mathbf{j}$

Equilibrio rotacional

Si la velocidad angular de un cuerpo extenso (velocidad de rotación), es constante, se afirma que se encuentra en equilibrio de rotación. Entonces un cuerpo en equilibrio de rotación es aquel cuya velocidad angular es constante, igual o diferente de cero.

Un ejemplo de este estado dinámico es el que tiene el plato de un tocadiscos al girar, no así los neumáticos de un auto cuando curva, pues aunque su rapidez se mantuviera constante, el plano de rotación del cuerpo rígido, en este caso el neumático, no es constante y por tanto la velocidad angular varía en dirección.

De lo anterior se concluye que la condición del equilibrio rotacional es $\boldsymbol{\alpha} = 0$, de acuerdo con esta condición en la ecuación $\sum\boldsymbol{\tau} = I\boldsymbol{\alpha}$ se concluye que $\sum\boldsymbol{\tau} = 0$.

Es justo aclarar que el torque, que representa $\boldsymbol{\Sigma\tau}$**,** es el torque neto externo, esto es, la suma vectorial de todos los torques ejercidos sobre el cuerpo, por las fuerzas externas a él. Es por ello que, en forma general, se puede expresar la condición para el equilibrio rotacional de cuerpos según la siguiente expresión:

$$\Sigma\boldsymbol{\tau}_{Ext} = \mathbf{0} \qquad (3\text{–}18)$$

Equilibrio total

Se dice que un cuerpo extenso está en equilibrio total cuando no posee aceleración, tanto para su movimiento de traslación, como para su movimiento de rotación y por tanto cumple simultáneamente con que:

$$\Sigma\,\mathbf{F} = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \Sigma\,\boldsymbol{\tau}_{Ext} = \mathbf{0} \qquad (3\text{–}19)$$

Un ejemplo del movimiento de un cuerpo en equilibrio total es el que se genera al lanzar un disco de jockey, a través del hielo (en ausencia de rozamiento). Su centro de masa *C* se moverá en línea recta, con velocidad lineal **v** constante, porque $\Sigma\,\mathbf{F} = \mathbf{0}$, y girará, simultáneamente, alrededor de un eje vertical que atraviesa *C* con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ constante, porque $\Sigma\,\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$.

Ejemplo 7. Si el sistema de la Fig. 3–20 se encuentra en equilibrio, determine el valor del peso suspendido en *A*.

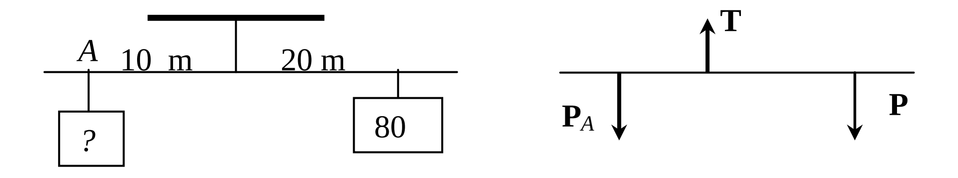


Figura 3–20

Como el sistema está en equilibrio de traslación, se cumple que:

$$\Sigma\mathbf{F}_{Ext} = \mathbf{0}$$

$$-P_A\,\mathbf{j} - P\,\mathbf{j} + T\,\mathbf{j} = \mathbf{0}$$

Como, además, el sistema está en equilibrio de rotación, también se establece que:

$$\Sigma\boldsymbol{\tau}_{Ext} = \mathbf{0}$$

$$(-10\,\mathbf{i}) \times (-P_A\,\mathbf{j}) + (20\,\mathbf{i}) \times (-80\,\mathbf{j}) = \mathbf{0}$$

La solución de estas ecuaciones indica que:

$$P_A = 160 \text{ N}$$

$$T = 240 \text{ N}$$

Cantidad de movimiento angular (CMA)

Así como la ecuación $\Sigma\boldsymbol{\tau} = I\boldsymbol{\alpha}$ es la contraparte rotacional de la expresión $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, el análogo rotacional de la cantidad de movimiento lineal, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, es la cantidad de movimiento angular, $\mathbf{J}$. Si un cuerpo rota, respecto al mismo eje fijo, con relación al que se determinó su momento de inercia I, sin cambiar la orientación de su plano de rotación, con una cierta velocidad angular, $\boldsymbol{\omega}$, su cantidad de movimiento angular es:

$$\mathbf{J} = I\boldsymbol{\omega} \qquad (3\text{–}20)$$

En este caso, como I es un escalar positivo, $\mathbf{J}$ está en la misma dirección de $\boldsymbol{\omega}$. En problemas de rotación simples se puede considerar a J como un escalar positivo para las rotaciones alrededor del eje en sentido contrario a las manecillas del reloj y negativo, en sentido de las manecillas.

Si el sistema está formado por una sola partícula, entonces la cantidad de movimiento angular se calculará con la expresión siguiente:

$$J = mr^2\,\omega \qquad (3\text{–}21)$$

Para un sistema formado por n partículas, que giran con la misma velocidad angular

$$J = (m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \ldots + m_nr_n^2)\,\omega = \Sigma\, m_ir_i^2\,\omega \qquad (3\text{–}22)$$

UNIDADES DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR: En el sistema internacional son (kg m^2/s) y la dimensión $[M\,L^2\,T^{-1}]$.

Ecuación impulso angular-CMA

El objeto de masa m, de la Fig. 3– 20, por efecto de un torque constante sobre él, varía su velocidad angular del valor ω_0 al valor ω, en el tiempo Δt. Por tanto, se puede escribir:

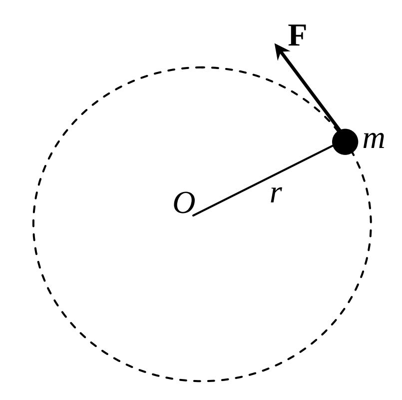


Figura 3–20 Objeto de masa *m*, que rota a una distancia *r*, del centro de rotación fijo *O*.

$$\Sigma\,\boldsymbol{\tau} = I\boldsymbol{\alpha} = I\,(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0)\,/\,\Delta\,t = (I\boldsymbol{\omega} - I\boldsymbol{\omega}_0)\,/\,\Delta\,t.$$

Como la Ec. (3–20) establece $\mathbf{J} = I\boldsymbol{\omega}$, se tiene que:

$$\Sigma\,\boldsymbol{\tau} = (\mathbf{J} - \mathbf{J}_0)/\Delta\,t$$

$$\Sigma\,\boldsymbol{\tau} = \Delta\,\mathbf{J}/\Delta\,t$$

$$\Delta\,\mathbf{J} = \Sigma\,\boldsymbol{\tau}\cdot\Delta\,t \qquad (3\text{–}23)$$

Esta ecuación es el análogo rotatorio de la ecuación $\Sigma\,\mathbf{F} = \Delta\mathbf{p}/\Delta t$, donde $\Sigma\,\boldsymbol{\tau}\cdot\Delta\,t$ representa el impulso angular.

Principio de conservación de la cantidad de movimiento angular

Cuando el torque neto, $\Sigma\boldsymbol{\tau}$, que actúa sobre el sistema es cero, se tendrá que $\Delta\mathbf{J}/\Delta t = 0$. En este caso, la razón de cambio de la cantidad de movimiento angular es cero. Por tanto, el producto $I\,\boldsymbol{\omega}$ permanece constante en el tiempo; es decir, $\mathbf{J}_0 = \mathbf{J}$.

La cantidad de movimiento angular del sistema se conserva cuando el torque externo neto que actúa sobre el sistema es cero. Es decir, cuando $\Sigma\,\boldsymbol{\tau} = 0$, la cantidad de movimiento angular inicial es igual a la cantidad de movimiento angular final.

Cantidad de movimiento angular asociado al movimiento lineal

La cantidad de movimiento angular **J** tiene un significado independiente de la rotación real. Considere una partícula *A*, de masa *m*, que se mueve con velocidad lineal constante e igual a **v** por una línea recta como, se indica en la Fig. 3–21.

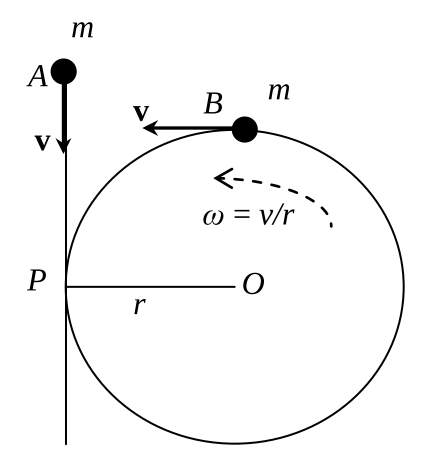


Figura 3–21 Cantidad de movimiento angular para el movimiento rectilíneo uniforme

La máxima aproximación de esta partícula al punto fijo *O* será cuando está en *P*, a una distancia *r* de *O*. En el instante que *A* pasa por *P* no puede diferenciarse de una segunda partícula idéntica *B*, que estaría girando alrededor de *O* en un círculo de radio *r*, ni en su masa *m*, ni en su posición *r*, ni en su velocidad tangencial *v*, ni en su velocidad angular $\omega = v/r$. Esto permite asignar a *A* una cantidad de movimiento angular igual a la de *B*; esto es:

$$J = mr^2\,\omega = mr^2\,v/r = mvr.$$

Puesto que *A* viaja con velocidad constante, no debe haber fuerza neta que actúe sobre la partícula, consecuentemente no debe haber torque. Note que *mvr* es el producto de *r* por la cantidad de movimiento lineal *mv*.

La ecuación anterior conduce a una definición más completa de la cantidad de movimiento angular. Tanto para el caso en el que no cambia el plano de rotación como para el que sí varía el plano. Entonces **J** puede escribirse de la siguiente manera:

$$\mathbf{J} = m\,\mathbf{r} \times \mathbf{v} \qquad (3\text{–}24)$$

Para una sola partícula, donde **r** es el radio vector de la partícula desde el punto alrededor del cual se calcula la cantidad de movimiento angular, y **v** es su velocidad. La cantidad de movimiento angular también puede escribirse como:

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \qquad (3\text{–}25)$$

Para un sistema de *n* partículas puede generalizarse como:

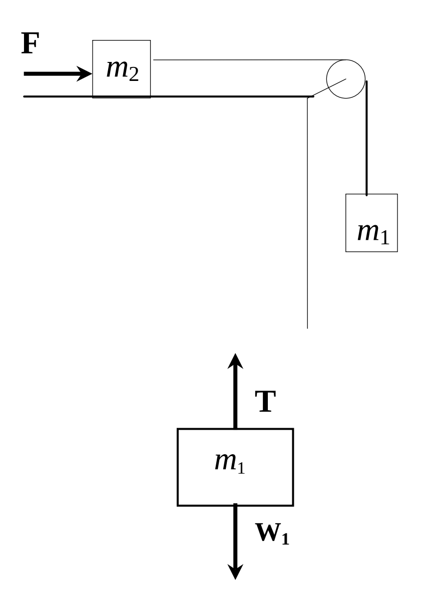
$$\mathbf{J} = \Sigma\, \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i. \qquad (3\text{–}26)$$

Donde $\mathbf{r}_i$ es el vector posición de la i-ésima partícula, respecto al punto desde el cual se calcula la cantidad de movimiento angular de la misma y, $\mathbf{p}_i$ es la cantidad de movimiento lineal de la i-ésima partícula.

PROBLEMAS

3.1 LEYES DE NEWTON

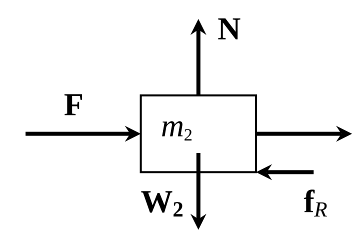
1. En el sistema de la figura, el bloque, de masa m_1 = 10 kg, baja con rapidez constante, cuando se aplica una fuerza **F** horizontal, sobre el bloque de masa m_2 = 25 kg. Si el coeficiente de rozamiento entre m_2 y el plano horizontal es 0.6, determine **F**.



$$\Sigma F_y = 0$$

$$T - m_1\, g = 0$$

$$T = m_1\, g = 100 \text{ N}$$

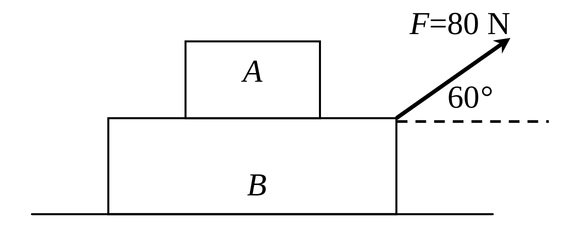


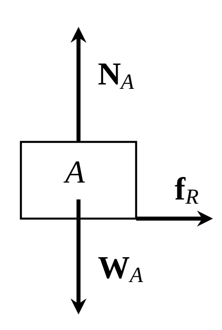
$$\Sigma F_x = 0$$

$$F + T - f_R = 0$$

$$F = \mu\, m_2\, g - T = 0.6\,(25)10 - 100 = 50 \text{ N}$$

2. En el sistema de la figura no existe rozamiento entre el bloque *B* y el piso. Las masas de los bloques *A* y *B* son de 5 y 15 kg, respectivamente. Determine:
a) el valor del coeficiente de rozamiento, entre *A* y *B*, para que *A* no se mueva, con respecto a *B*.
b) la aceleración con la que se mueve *A*, con respecto al piso.
c) la fuerza que hace el piso sobre el bloque *B*.

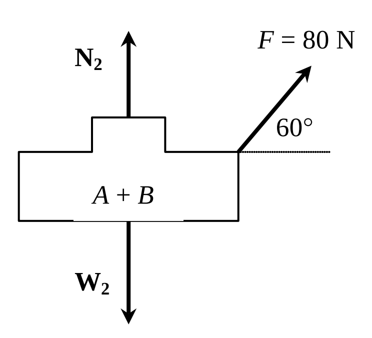




$\Sigma \mathbf{F} = m_A \, \mathbf{a}_A$

$\mu N_A = m_A \; a_A$

$\mu = m_A \, a_A \, / N_A$



$\Sigma Fx = m_{A+B} \, a_{Ax}$

$80 \cos 60° = 20 \, a_A$

$a_A = 2 \text{ m/s}^2$

a) $\mu = 5(2/50) = 0.2$

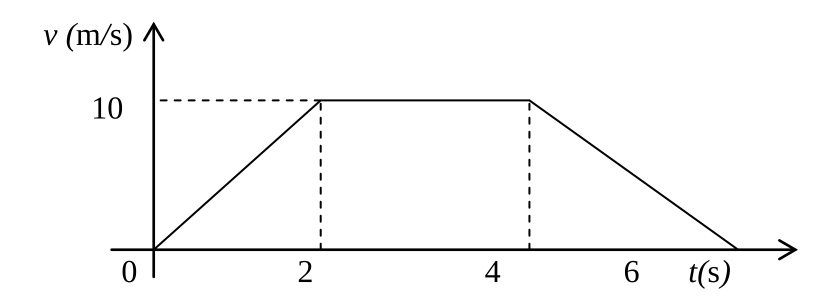
b) $a_A = 2$ m/s^2

$f_R = 10$ N

$N_2 = W_2 = 200$ N

c) $\mathbf{N_2} = 200\,\mathbf{j}$ N

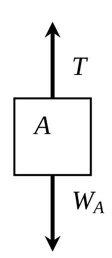
3. Un ascensor que pesa 500 N sube verticalmente por un túnel sin rozamiento. El gráfico muestra la velocidad del ascensor contra el tiempo. Calcule la tensión del cable que soporta al ascensor, durante el movimiento en los siguientes intervalos de tiempo.
a) 0 a 2 s.
b) 2 a 4 s.
c) 4 a 6 s.



De 0 a 2 s: $a_A = \Delta v/\Delta t = (10 - 0)/(2 - 0) = 5$ m/s^2

De 2 a 4 s: $a_A = 0$

De 4 a 6 s: $a_A = -5$ m/s^2



$\Sigma F_y = m_A a_{Ay}$

$T - W_A = 5\, m_A$

a) $T = 250 + 500 = 750$ N

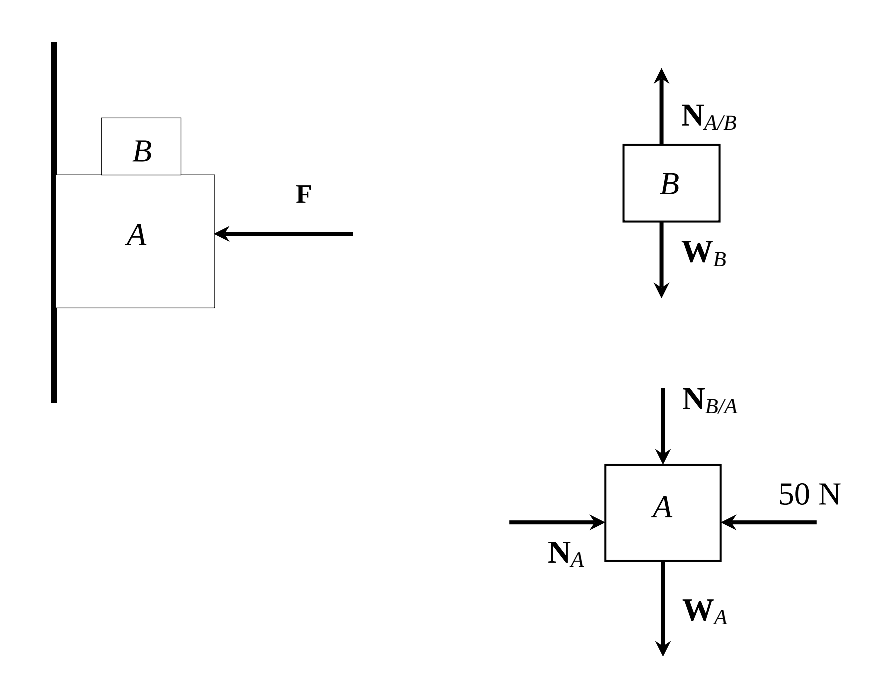
$\Sigma F_y = 0$

b) $T = W_A = 500$ N

$T - W_A = -50 \times 5 = -250$ N

c) $T = 500 - 250 = 250$ N

4. En el sistema de la figura, *A* pesa 50 N, *B* pesa 20 N, *F* = 50 N y el coeficiente de rozamiento entre *A* y la pared es de 0.2. Determine la magnitud y dirección de la fuerza que ejerce *B* sobre *A*.



$\Sigma F_y = m_B\, a_y$

$W_B - N_{A/B} = 2\, a$

$\Sigma \mathbf{Fy} = m_A \mathbf{a}$

$W_A + N_{B/A} - f_R = m_A\, a$

$a = (50 + N_{B/A} - 0.2\times 50)/5$

$N_{A/B} = 20 - 2\, a$

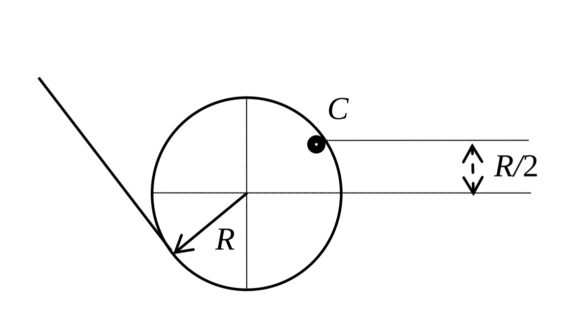
$5\, a = 50 + (20 - 2\, a) - 10$

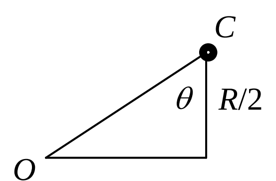
$7\, a = 60$

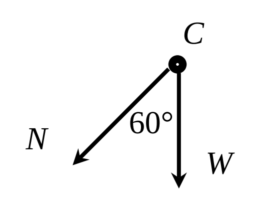
$a = 8.57$ m/s^2

$N_{B/A} = 20 - 2\times 8.57 = 2.86$ N

5. En el rizo de la figura, determine el valor de la fuerza normal cuando un cuerpo de masa m se encuentra en el punto C. La rapidez en este punto es de 3 m/s.







$\cos\theta = (R/2) / R = 0.5$

$\theta = 60°$

$\Sigma \mathbf{F}_C = m\, \mathbf{a}_C$

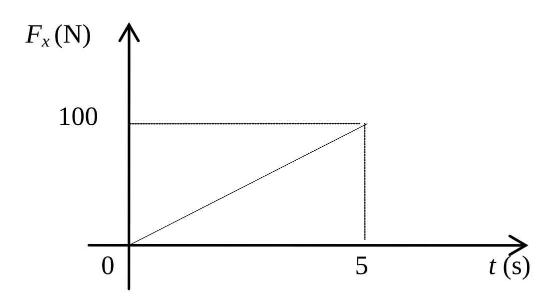
$mg \cos 60° + N = m\, v^2/R$

$N = m\, v^2/R - mg \cos 60°$

$N = m\,(9/R - 5)$

3.2 IMPULSO-CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL

6. Una partícula, de 2 kg, es impulsada por una fuerza neta F_x, que varía con el tiempo como se indica en la figura. A t = 0 su velocidad $\mathbf{v}_x$ es de 10 **i** m/s. Determine su velocidad a t = 5 s. Utilice la ecuación impulso-cantidad de movimiento lineal.



Δp_x = área del triángulo = 250 Ns

$\Delta p_x = m\,(v_x - v_{xo})$

250 N s = 2 kg $(v_x - v_{xo})$

125 m/s = $v_x - v_{xo}$

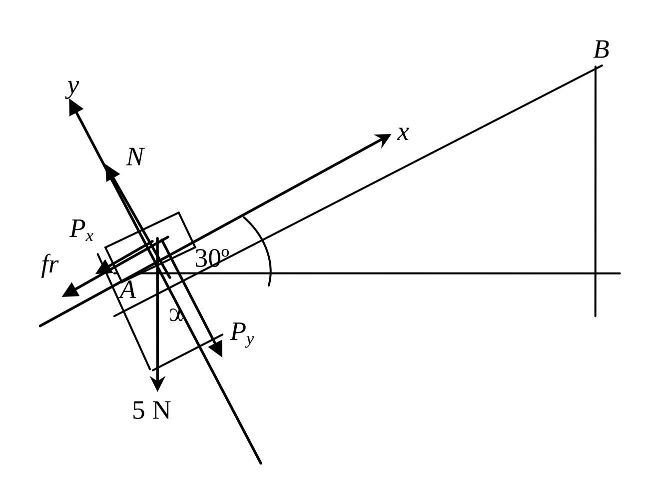
Como el movimiento ocurre sobre el eje x, se tiene que:

$125 = v_x - v_{xo}$

Si v_{xo} = 10 m/s, entonces:

$\mathbf{v}$ = 125 **i** + 10 **i** m/s = 135 **i** m/s

7. Sobre un plano inclinado 30°, se patea hacia arriba un bloque de 0.5 kg, el mismo que se detiene luego de recorrer sobre el plano una distancia de 8 m. El coeficiente de rozamiento es de 0.4. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza media requerida para patear el bloque? Considere que el contacto entre el bloque y el pie duró 0.1s.



$AB = 8$ m ; $\alpha = 30º$

Las componentes del peso en las direcciones x e y son:

$P_y = 5 \cos 30^o = 4.33$ N

$P_x = 5 \text{ sen} 30^o = 2.5$ N

Ahora:

$\Sigma F_y = 0$

$N - P_y = 0$

$N = Py = 4.33$ N

La sumatoria de fuerzas a lo largo del eje x establece que:

$\Sigma F_x = m\, a$

$-fr - P_x = m\, a$

$-\mu (4.33) - 2.5 = 0.5\, a$

Despejando a, se tiene que:

$a = -8.464$ m/s^2.

Con esta información se calcula la velocidad en A:

$v^2_B = v^2_A - 2\, a\, (AB)$.

Pero como $v_B = 0$, se tiene que:

$v^2_A = 2$ a (AB), con lo que $v_A = 11.64$ m/s

$$F = \frac{(v_A - v_{0A})m}{\Delta t};$$

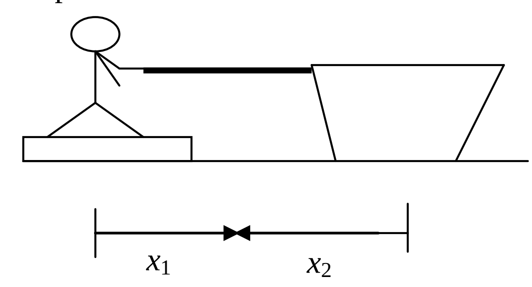
pero $v_{0A} = 0$; entonces:

$F = (mv_A) / \Delta t$

Lo que da como resultado:

$F = 58.2$ N.

8. Una persona de 50 kg que se encuentra sobre una balsa de 10 kg hala mediante una cuerda un bote de 150 kg que se encuentra a 10 m de distancia. ¿Cuántos metros se han desplazado desde su posición inicial, con respecto a tierra, el hombre y el bote cuando el bote y la balsa se unen? Desprecie la resistencia del aire.



La cantidad de movimiento lineal del sistema hombre-balsa-bote se conserva; por lo tanto se tiene que:

$$\mathbf{p}_o = \mathbf{p}_f$$

Como inicialmente todos estan en reposo, se tiene que las velocidades iniciales son cero, por lo tanto $\mathbf{p}_o = \mathbf{0}$. Si el hombre y la balsa tiene una velocidad v_1 **i** y el bote tiene una velocidad $-v_2$ **i**, se tiene que:

$$60\, v_1\, \mathbf{i} - 150\, v_2\, \mathbf{i} = 0;$$

con lo que:

$$60\, v_1 = 150\, v_2,$$

y que despejando v_1 se tiene:

$$v_1 = 2.5\, v_2.$$

Ahora:

$$x_1 = v_1\, t \;\text{ y }\; x_2 = v_2\, t$$

Despejando t de $x_2 = v_2 t$, se tiene:

$$t = (x_2/v_2)$$

Este valor reemplazando en x_1, da:

$$x_1 = v_1\, (x_2/v_2)$$

Pero como $(v_1/v_2) = 2.5$, se tiene que:

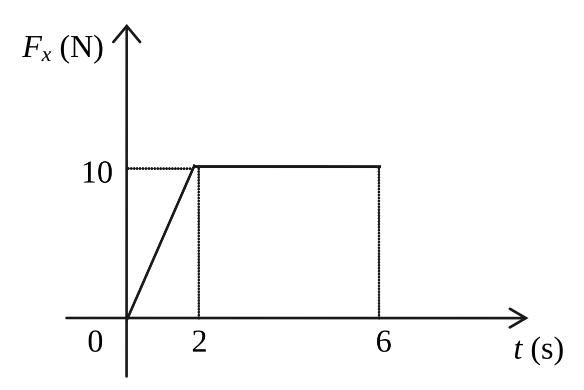
$$x_1 = 2.5\, x_2$$

Ahora bien, $x_2 = 10 - x_1$; que reemplazado en la ecuación anterior se tiene:

$x_1 = 2.5\ (10 - x_1)$.

Resolviendo esta ecuación se tiene que x_1 =7.14 m, y consecuentemente x_2 = 2.86 m.

9. Una partícula de 2 kg de masa se mueve a lo largo del eje *x* bajo la acción de una fuerza neta F_x cuyo comportamiento en el tiempo se muestra en la figura. A *t*=0 s la partícula se movía con una velocidad de - 4 **i** m/s. Determinar:
a) ¿qué representa el área bajo la curva F_x contra *t*?
b) la velocidad de la partícula a *t*=5 s,
c) la fuerza media que actúa sobre la partícula de 0 a 5 s.



a) El área bajo la curva F_x contra *t*, representa el impulso.

b) El área del trapecio es:

$$A = \frac{(B+b)h}{2}$$

donde B es labase mayor; b es la base menor y h esla altura del trapecio, con lo que el área será:

$$A = \frac{(5+3)10}{2} = 40N\ s$$

$$\Delta p_x = m\ (\boldsymbol{v_x} - \boldsymbol{v_{ox}})\ ,$$

como m = 2 kg y sabiendo que $\Delta\mathbf{p}$ = 40 **i** , entonces:

$$20 = v_x - v_{ox}$$

Como $\mathbf{v_o} = -4\ \mathbf{i}$, se tiene que:

20 i + (–4 **i**) = **v,** con lo que **v =** 16 **i**

c**)** **F** = (40/5) **i**, que da **F** = 8 **i** N

10. El gráfico representa las condiciones inicial y final de la colisión entre un camión de 4 toneladas y un automóvil de 1 tonelada, que se desplazan entrelazados luego del choque. Determine la relación entre las magnitudes de sus velocidades iniciales. Desprecie la fricción.

De la conservación de la cantidad de movimiento lineal se tiene:

$$m_c\mathbf{v}_{co} + m_a\mathbf{v}_{ao} = (m_c + m_a)\mathbf{v}_f$$

Como:

$$\mathbf{v}_f = v_f\,(\cos 30^o\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} 30^o\,\mathbf{j}).$$

Por lo tanto:

$$4\,v_{co}\,\mathbf{i} + v_{ao}\,\mathbf{j} = 5\,v_f\,(\cos 30^o\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} 30^o\,\mathbf{j}).$$

Igualando los coeficientes de cada vector unitario se tiene:

$$4\,v_{co} = 5\,v_f \cos 30^o$$

$$v_{ao} = 5\,v_f \operatorname{sen} 30^o$$

Dividiendo las dos ecuaciones se tiene:

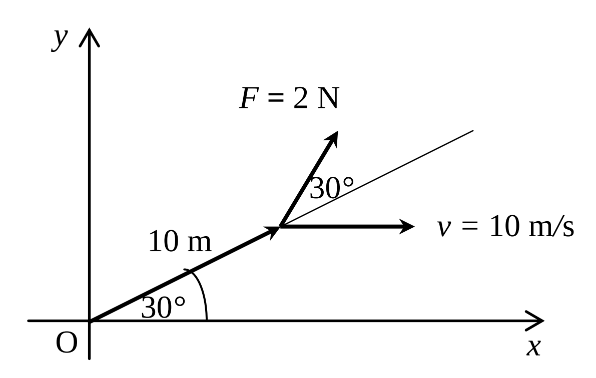
$$\frac{4v_{co}}{v_{ao}} = \cot 30^o$$

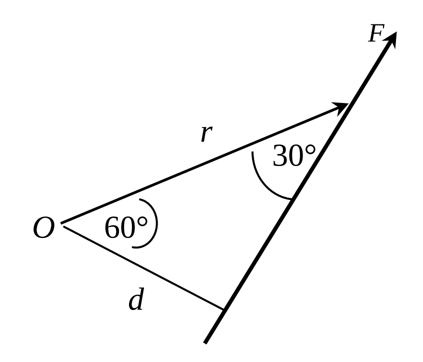
y finalmente haciendo la relación entre las dos velocidades se tiene:

$$\frac{v_{co}}{v_{ao}} = \frac{\cot 30^o}{4} = 0.433$$

3.3 TORQUE. EQUILIBRIO DEL SÓLIDO

11. En la figura, los vectores posición, velocidad y fuerza, están contenidos en el plano *xy*. Determine el torqu y la fuerza con respecto a O.





En el triángulo rectángulo se determina el brazo de momento *d*, así:

$d = 10\ cos\ 60° = 5$ m.

Aplicando la ecuación del torque , se tiene:

$\boldsymbol{\tau}_{F/0} = d\ F = 5 \times 2 = 10$

La dirección del torque se determina aplicando la regla de la mano derecha y de esta forma se ve que es **k,** luego: $\boldsymbol{\tau}_{F/0} = 10\ \mathbf{k}$ (mN)

Otra forma:

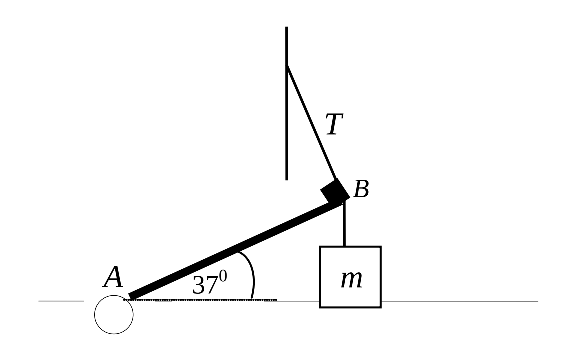
$\mathbf{r}_o = 10\ (\cos 30°\mathbf{i} + \text{sen}\ 30°\ \mathbf{j}) = 8{,}66\ \mathbf{i} + 5\ \mathbf{j}$ m

$\mathbf{F} = 2\ (\cos 60°\ \mathbf{i} + \text{sen}\ 60°\ \mathbf{j}) = \mathbf{i} + 1{,}73\ \mathbf{j}$ N

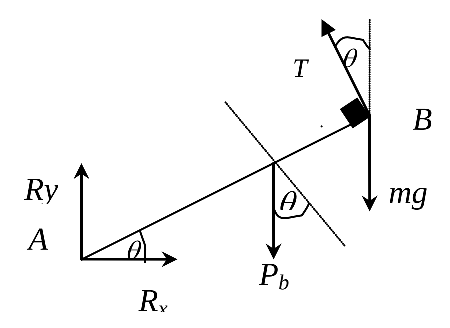
$\boldsymbol{\tau}_{F/0} = \mathbf{r}_o\ \mathbf{F}$

$$\boldsymbol{\tau}_{F/0} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 8{,}66 & 5 & 0 \\ 1 & 1{,}73 & 0 \end{vmatrix} = (15 - 5)\ \mathbf{k} = 10\ \mathbf{k}\ \text{mN}$$

12. La barra *AB* de la figura es homogénea, tiene una masa de 28 kg, y una longitud l y en su extremo soporta un bloque de masa $m = 3.6$ kg. Si el sistema está en equilibrio, determine la tensión del cable que está sujeto a la pared. El ángulo entre la barra y la cuerda es de 90º.



Si se separa a la barra del sistema y se hace su D.C.L.



Se escoge el punto *A*, para determinar el torque de cada una de las fuerzas teniendo como sentido positivo el antihorario. El sumatorio de torques (torque neto) se iguala a cero ya que el sistema está en equilibrio, para determinar *T*, así:

$$\Sigma \boldsymbol{\tau}_A = 0$$

$$T\, l - 36\, l \cos 37° - 280 \times 0.5 \cos 37° = 0$$

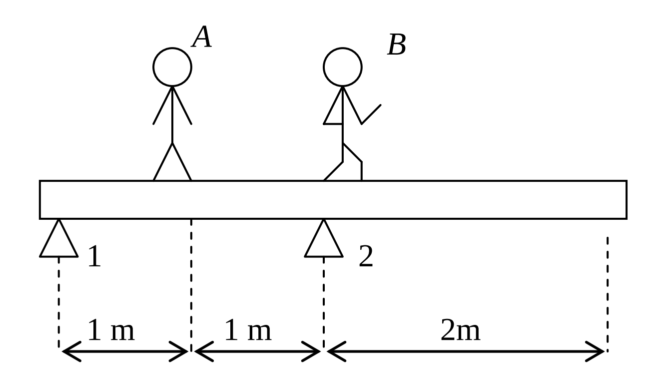
$$T - 28{,}75 - 111{,}81 = 0$$

$$T = 140{,}56$$

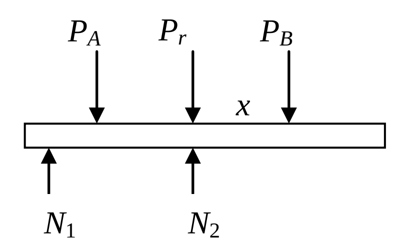
$$\mathbf{T} = 140{,}56\,(-\operatorname{sen} 37°\ \mathbf{i} + \cos 37°\ \mathbf{j})$$

$$\mathbf{T} = -84{,}59\ \mathbf{i} + 112{,}26\ \mathbf{j}\ \text{N}$$

13. El hombre *A* de la figura pesa 888 N y *B* pesa 600 N. ¿Hasta dónde debe caminar el hombre *B*, para que la viga empiece a levantarse del apoyo 1? ¿Cuál es la reacción del apoyo 2 en ese instante? El peso de la viga es 250 N.



Se separa la viga del sistema y se hace su D.C.L.



Se escoge el punto 2 para calcular el torque de cada una de las fuerzas; teniendo como sentido positivo el antihorario.El sumatorio de torques se iguala a cero ya que la viga está en equilibrio, para determinar x .

(+) $\Sigma\ \tau_2 = 0$

$P_A \times 1 - P_B\ x = 0$

$x = P_A \times 1/\ P_B = 888/600 = 1{,}48$ m

B debe caminar 1,48 m a la derecha desde el punto 2.

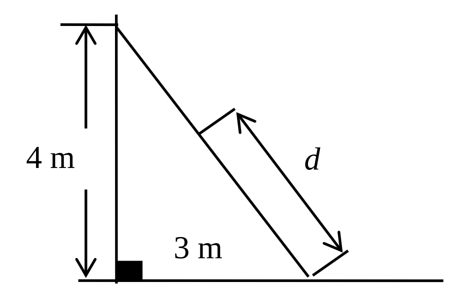
Como la viga está en equilibrio; también se tiene que:

$\Sigma\ F_y = 0$

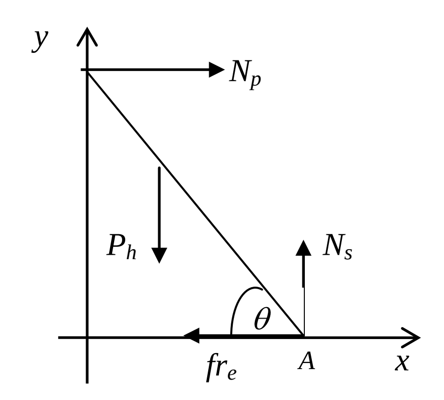
$N_2 - P_A - P_V - P_B = 0$

$N_2 = P_A + P_V + P_B = 888 + 250 + 600 = 1738$ N

14. Calcule la máxima distancia d a la que puede subir por la escalera una persona de 500 N. La pared es lisa y el piso ofrece una fuerza de rozamiento estática máxima de 300 N.



Se separa la escala del sistema y se hace su D.C.L.



Como la escalera está en equilibrio se tiene que:

$\Sigma F_x = 0; \quad N_p - f_{re} = 0; \quad f_{re} = N_p = 300$ N

$\Sigma F_y = 0; \quad N_s - P_h = 0; \quad N_s = P_h = 500$ N

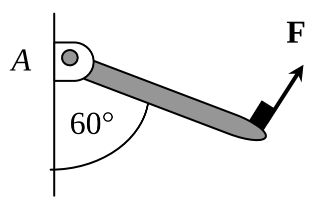
(+) $\quad \Sigma\ \tau_A = 0$

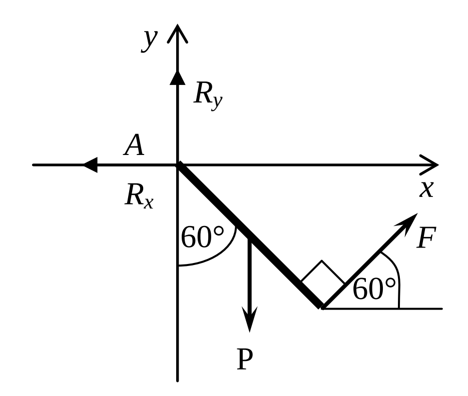
$N_p\ 4 - P_h\ d \cos\theta = 0$

$300 \times 4 - 500\ d\ 3/5 = 0$

$d = 1200/300 = 4$ m

15. Una viga uniforme de 50 kg y longitud L se encuentra en reposo por la acción de una fuerza **F**, como indica la figura. Determine:
a) el módulo de la fuerza **F.**
b) la reacción total en el pasador colocado en el punto A.





(+) $\Sigma\ \tau_A = 0$

$F \times L - P$ sen $60°\ L/2 = 0$

$F - 500/2 \times 0.866 = 0$

$F = 216.5$ N

$\Sigma\ F_x = 0$

$F \cos 60° - R_x = 0$

$R_x = 216.5 \times 0.5 = 108.25$ N

$\Sigma\ F_y = 0$

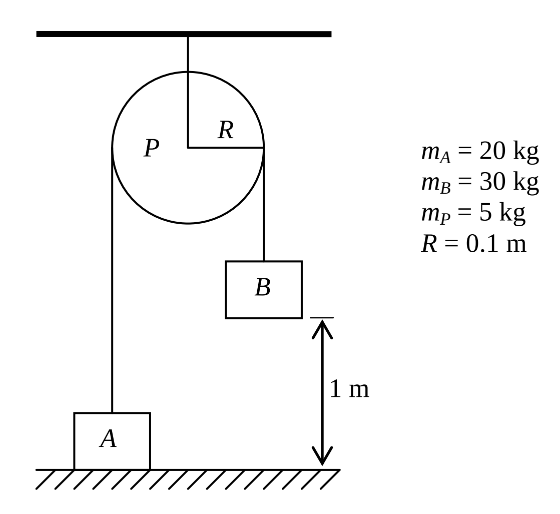
$R_y + F$ sen $60° - P = 0$

$R_y = P - F$ sen $60° = 500 - 216.5 \times 0.866 = 312{,}5$ N

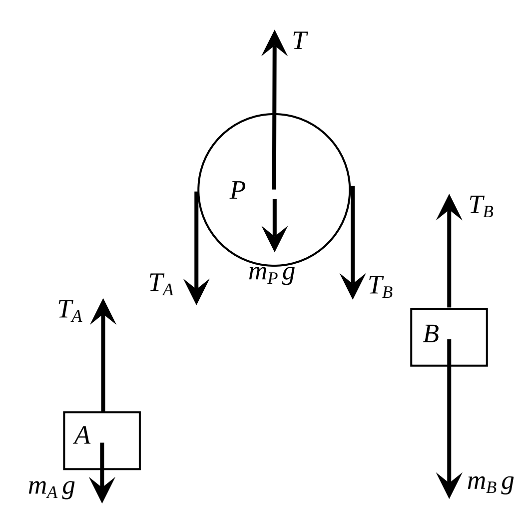
$\mathbf{R} = -\ 108.25\ \mathbf{i} + 312.5\ \mathbf{j}$ N

3.4 DINÁMICA ROTACIONAL

16. El sistema de la figura se suelta a partir del reposo. Determinar la rapidez de cada bloque en el instante en el cual el bloque *B* llega al suelo.



Primero se hace el diagrama de cuerpo libre de los dos bloques y la polea.



Si se considera inextensible a la cuerda la aceleración de los dos bloques es igual:

$$a_A = a_B = a.$$

Si se aplica la segunda ley de Newton a los bloques *A* y *B* se obtienen las ecuaciones

$$m_B\, g - T_B = m_B\, a \qquad \text{y} \qquad T_A - m_A\, g = m_A\, a,$$

las cuales, si se sustituyen en ellas los valores de las masas, se convierten en

$$300 - T_B = 30\, a, \qquad (1)$$
$$T_A - 200 = 20\, a. \qquad (2)$$

Por lo pronto se tienen dos ecuaciones con tres incógnitas. Una tercera ecuación la se obtiene aplicando la ecuación de la dinámica rotacional

$$\Sigma \tau_O = I_O\ \alpha$$

a la polea. Si se calculan los torques con respecto al eje de la polea y si I_O es el momento de inercia de la polea con respecto a su eje se obtiene la ecuación:

$$T_B\, R - T_A\, R = I\, \alpha = ½\, m_P\, R^2\, \frac{a}{R} = ½\, m_P\, R\, a,$$

$$T_B - T_A = ½\, m_P\ \ a,$$

la cual, una vez que se sustituyen valores, se convierte en

$$T_B - T_A = 2.5\, a. \qquad (3)$$

Una vez resueltas las ecuaciones (1), (2) y (3) se obtiene el valor de la aceleración de los bloques:

$$a = 1.9 \text{ m/s}^2.$$

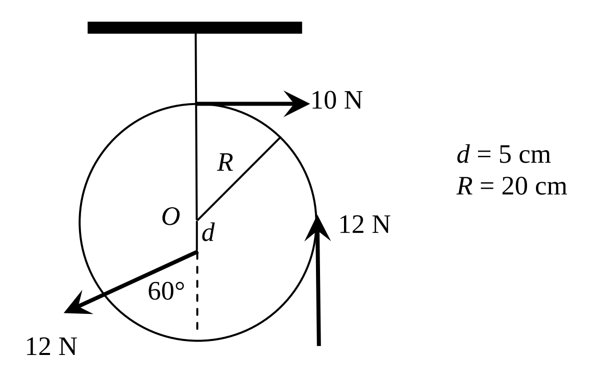
De la ecuación

$$v_{y2}^2 = v_{y1}^2 + 2a_y\, \Delta\, y$$

se obtiene la velocidad v_{y2} con la cual llega el bloque B al suelo:

$$v_{y2} = \sqrt{2(-1.9)(-1)} = 1.95 \text{ m/s}.$$

17. Un volante homogéneo vertical de 2 kg de masa está sometido a la acción de las fuerzas indicadas en la figura. Determinar la aceleración angular del volante.



El momento de inercia del volante con respecto a su eje O es

$$I_O = ½\, m_P\, R^2 = ½\ 2 \text{ kg}\ 0.2^2 \text{ m}^2 = 0.04 \text{ kg m}^2.$$

La ecuación de la dinámica rotacional

$$\Sigma \boldsymbol{\tau}_O = I_O\, \boldsymbol{\alpha}$$

aplicada al volante resulta en

$$-10 \times 0.2\ \mathbf{k} + 12 \times 0.2\ \mathbf{k} - 12 \cos 30° \times 0.05\ \mathbf{k} = 0.04\ \boldsymbol{\alpha},$$

de donde se obtiene la aceleración angular del volante:

$$\boldsymbol{\alpha} = -\,2.82\ \mathbf{k}\ \text{rad/s}^2.$$

18. Un esmeril de 1.4 kg de masa tiene la forma de un cilindro homogéneo de 0.2 m de radio. El esmeril adquiere una rapidez angular de 1800 rps a partir del reposo en un intervalo de 6 s y con una aclaración angular constante. Calcule
a) la magnitud del torque entregado por el motor,
b) la magnitud de la fuerza tangencial que es necesaria aplicar al esmeril para detenerlo en un intervalo de 5 s, suponiendo que en el instante 6 s se apaga el motor.

a) El momento de inercia del esmeril con respecto a su eje es

$$I = ½\, m\, R^2 = ½\ 1.4 \times 0.2^2 = 0.028\ \text{kg m}^2.$$

La velocidad angular del esmeril en el instante 6 s es

$$\omega = 1800\ \frac{\text{rev}}{\text{s}}\ 2\,\pi\ \frac{\text{rad}}{\text{rev}} = 5661.15\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

La aceleración angular del esmeril es

$$\alpha = \frac{\omega - 0}{\Delta t} = \frac{5661.15}{6} = 943.52\,\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

El torque neto entregado por el motor es

$$\Sigma\ \tau = I\ \alpha = 0.028\ \text{kg m}^2 \times\ 943.52\,\frac{\text{rad}}{\text{s}^2} = 0.26\ \text{m N}.$$

b) La aceleración angular del esmeril en el intervalo de los 6 s a los 11 s es

$$\alpha = \frac{0 - \omega}{\Delta t} = \frac{-\,5661.15}{11 - 6} = -1132.2\,\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

El torque neto que produce esa aceleración angular es

$$\Sigma\ \tau = I\ \alpha = 0.028\ \text{kg m}^2 \times -1132.2\,\frac{\text{rad}}{\text{s}^2} = -\,31.7\ \text{m N}.$$

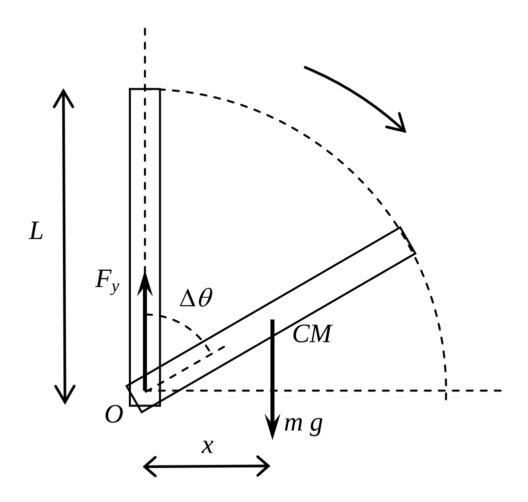
Por otro lado, el torque neto es igual a

$$\Sigma\ \tau = -F_T\ R,$$

de donde se obtiene que

$$F_T = -\frac{-31.7\ \text{m N}}{0.2\ \text{m}} = 158.5\ \text{N}\,.$$

19. Una varilla uniforme de masa m y longitud L se suelta desde la posición vertical. La varilla comienza a girar alrededor de un eje fijo horizontal liso que pasa por su extremo inferior. Se conoce que el momento de inercia de la varilla con respecto a su centro de masa es $\frac{1}{12} m\,L^2$. Calcular la aceleración angular de la varilla en el instante en el cual pasa por la posición horizontal.



Se va a necesitar el momento de inercia de la varilla con respecto al eje de rotación:

$$I_O = I_{CM} + m\left(\tfrac{L}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{12} mL^2 + \tfrac{1}{4}\ mL^2 = \tfrac{1}{3}\ mL^2.$$

Se necesitará también el valor de x, que se deduce de la geometría de la figura:

$$x = \frac{L}{2}\,\text{sen}\,\Delta\theta.$$

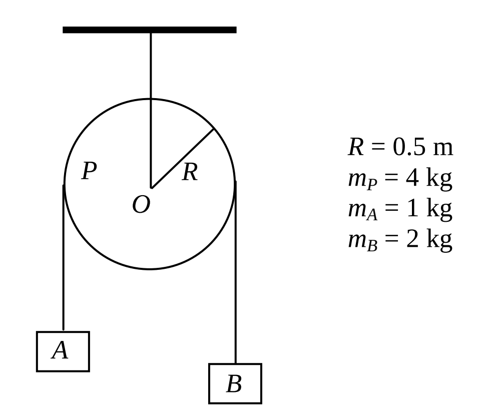
Se aplica ahora a la varilla la ecuación de la dinámica rotacional:

$$\Sigma\ \tau_O = I_O\ \alpha\,,$$
$$x\,m\,g = \tfrac{1}{3}\ m\,L^2\ \alpha,$$
$$\frac{L}{2}\,\text{sen}\,\Delta\theta\, m\,g = \tfrac{1}{3}\ m\,L^2\ \alpha,$$

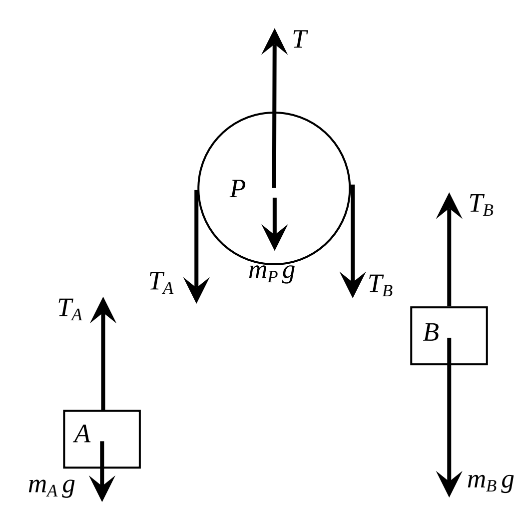
de donde se obtiene el valor de la aceleración angular de la varilla cuando $\Delta\theta = \pi\,/\,2$ rad:

$$\alpha = \frac{3}{2}\frac{g}{L^2}\,.$$

20. Calcular la magnitud de la aceleración centrípeta de una partícula situada en el borde de la polea de la figura 3 s después de abandonar el sistema desde el reposo.



Se comenzará haciendo los diagramas de cuerpo libre de la polea y de los bloques:



El momento de inercia de la polea con respecto a su eje de rotación es

$$I_O = ½\, m_P\, R^2 = ½\; 4 \times 0.5^2 = 0.5 \text{ kg m}^2.$$

Debido a que la cuerda es inextensible, las aceleraciones de los bloques son iguales:

$$a_A = a_B = a.$$

Todos los puntos de la cuerda que une los dos bloques tienen la aceleración a. Como dicha cuerda no desliza con respecto a la polea, los puntos exteriores de la polea tienen la aceleración tangencial igual a a. Por lo tanto, la aceleración angular de la polea es

$$\alpha = a\, /\, R.$$

La segunda ley de Newton aplicada a los bloquesda las ecuaciones

$$T_A - m_A\, g = m_A\, a \qquad \text{y} \qquad m_B\, g - T_B = m_B\, a,$$

las cuales, si se sustituyen en ellas los valores de las masas se convierten en

$$T_A - 10 = 1\, a. \qquad (1)$$

$$20 - T_B = 2\,a, \qquad (2)$$

Además, la ecuación de la dinámica rotacional

$$\Sigma \tau_O = I_O\ \alpha$$

aplicada a la polea y calculando los torques con respecto al eje de la poleada la expresión:

$$T_B\,R - T_A\,R = I\,\alpha = ½\,m_P\,R^2\,\frac{a}{R} = ½\,m_P\,R\,a,$$

$$T_B - T_A = I\,\alpha = ½\,m_P\,a = ½\,4\,a = 2\,a. \qquad (3)$$

Resolviendo las ecuaciones (1), (2) y (3) se obtiene el valor de la aceleración tangencial a de los puntos situados en el borde de la polea:

$$a = 2\ \text{m/s}^2,$$

de donde se obtiene la aceleración angular

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{2\ \text{m/s}^2}{0.5\,\text{m}} = 4\,\frac{\text{rad}}{\text{s}^2},$$

con la cual se puede obtener la velocidad angular de los puntos del borde de la polea en el instante 3 s:

$$\omega = \omega_0 + \alpha\,\Delta t = 0 + 4\,\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\,3\,\text{s} = 12\,\frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

y, finalmente, la aceleración normal de dichos puntos en el instante 3 s:

$$a_N = \omega^2\,\text{R} = 12^2\,\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\ 0.5\ \text{m} = 72\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

CAPÍTULO 4

FUERZA GRAVITACIONAL Y ELÉCTRICA

CAPÍTULO 4

FUERZA ELÉCTRICA Y GRAVITACIONAL

4.1 FUERZA GRAVITACIONAL

Leyes de Kepler del movimiento planetario

Los movimientos de las estrellas y los planetas, respecto a la Tierra, han sido observados y registrados desde muchos siglos atrás. Con base en estas observaciones se han elaborado diferentes modelos del sistema Solar. Así, por el año 140 d. C., el astrónomo griego Claudio Ptolomeo publicó un modelo del universo, con la Tierra en el centro y el Sol y las estrellas girando, en círculos simples, alrededor de ella; mientras que, los demás planetas giraban alrededor de la Tierra por trayectorias más complejas, formadas por pequeños círculos, llamados epiciclos, superpuestos sobre otros círculos mayores, lo que daba como resultado que los planetas giren alrededor de la Tierra por órbitas elipsoidales.

Este modelo geocéntrico fue aceptado durante catorce siglos, puesto que, en 1543, fue reemplazado por el modelo heliocéntrico del astrónomo polaco Nicolás Copérnico (1473 – 1543); más simple, pero sumamente controversial, ya que según este, el Sol y las estrellas estaban en reposo en el universo, mientras que la Tierra y los demás planetas giraban en círculos, alrededor del Sol.

Hacia fines del siglo XVI, el astrónomo danés Tycho Brahe estudió los movimientos de los planetas y realizó observaciones y mediciones (con tan solo un sextante bastante grande y un compás, ya que por ese entonces todavía no se había inventado el telescopio) de sus órbitas, así como de sus períodos de orbitación, con un grado de precisión admirable.

Luego de 16 años de analizar y comprobar los datos dejados por Tycho Brahe, el astrónomo alemán Johannes Kepler, que había sido su discípulo durante un corto tiempo, descubrió que había ciertas regularidades, que se resumen en tres enunciados conocidos como leyes de Kepler y que se transcriben a continuación:

1. Todos los planetas se mueven en órbitas elípticas, con el Sol situado en uno de sus focos.
2. El radio vector, trazado desde el Sol hasta cualquier planeta, barre áreas iguales en intervalos de tiempos iguales.
3. El cuadrado del período orbital de cualquier planeta es proporcional al cubo de la distancia media del planeta al Sol.

Primera Ley de Kepler

En su primera ley, Kepler indicó que las órbitas de los planetas son elípticas y que, por excepción, serían circulares. Esta idea contradecía totalmente a los científicos de ese entonces, quienes creían que las órbitas perfectamente circulares de los planetas reflejaban de alguna manera la perfección de los cielos.

Vale la pena revisar rápidamente la geometría de la elipse para comprender mejor el modelo orbital, planteado en esta primera ley. Una elipse, como la de la Fig. 4−1, se puede entender como el lugar geométrico de todos los puntos, para los cuales la suma de las distancias desde dos puntos llamados focos, F_1 y F_2, es constante; es decir, $F_1M + F_2M$ = cte. Estos focos están a una misma distancia c del centro O de coordenadas. La distancia a se llama semieje mayor y la distancia b se llama semieje menor. Si los focos coinciden en el centro O, c es igual a cero, a es igual a b y la elipse se convierte en una circunferencia.

Lo que diferencia a una elipse de otra es su excentricidad e, definida como la relación $e = c/a$, en donde e va a ser siempre menor que 1. Un valor pequeño de e indica que se trata de una elipse en la cual a y b son muy parecidos y, por lo tanto, la elipse no es muy diferente a una circunferencia. En el límite, si la excentricidad $e = 0$ significa que $c = 0$ y, por lo tanto, la curva es una circunferencia.

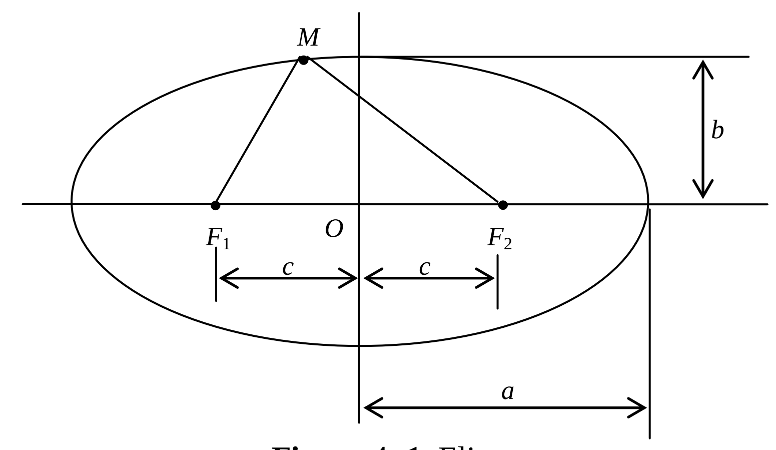


Figura 4−1. Elipse

Las excentricidades de las órbitas planetarias varían en un amplio rango, en el sistema solar. Así por ejemplo, la excentricidad de la órbita de Plutón es de 0.25, la mayor de los nueve planetas, mientras que la excentricidad de la órbita de la Tierra es 0.017. En este caso se puede asumir que su trayectoria es prácticamente circular. Con excepción de Mercurio y Plutón, el resto de planetas tienen excentricidades muy pequeñas, como la de la Tierra, lo cual permite asumir, para ciertos fines, que sus órbitas son casi circunferencias. Esto fue lo que consideró Newton para llegar a la ley de la gravitación universal.

Segunda ley de Kepler

La Fig. 4−2 representa, esquemáticamente, la segunda ley de Kepler. El área barrida por el radio vector de determinado planeta, en el intervalo Δt, entre los puntos *A* y *B*, es igual al área que barre el mismo radio vector, entre los puntos *C* y *D*, en el mismo intervalo Δt.

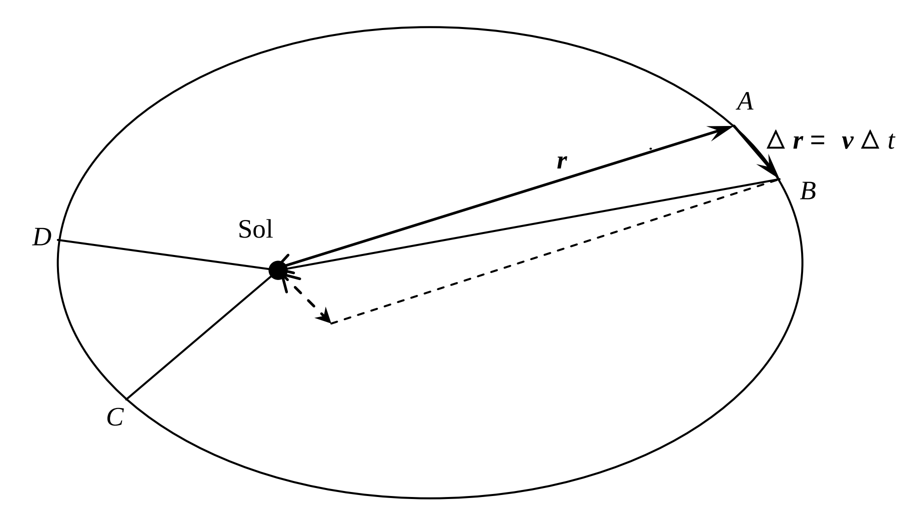


Figura 4−2. Área barrida por el radio vector de un planeta

Esta segunda ley se puede demostrar con base en el principio de conservación de la cantidad de movimiento angular y en la geometría de los movimientos de los planetas alrededor del Sol. Si se toman intervalos de tiempo, Δt, pequeños, el arco recorrido por un determinado planeta sería prácticamente igual a la magnitud del desplazamiento realizado. A su vez, este desplazamiento es igual al producto de la velocidad que tiene el mencionado planeta por el intervalo de tiempo, Δt. Entonces, de acuerdo con los fundamentos vectoriales, el área barrida por el radio vector $\boldsymbol{r}$, será igual a la mitad del módulo del producto vectorial entre los vectores posición y desplazamiento del planeta en cuestión. Es decir,

$$\text{Área} = 1/2\,|\boldsymbol{r} \times \Delta\boldsymbol{r}| = 1/2\,|\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}\Delta t|$$, que se puede escribir como:

$$\text{Área} = 1/2\,|\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}|\,\Delta t.$$

Por otro lado, la fuerza gravitacional que ejerce el Sol sobre el planeta está siempre dirigida hacia el centro del Sol; es decir, es una fuerza central. En consecuencia, la cantidad de movimiento angular del planeta, respecto al centro del Sol, va a permanecer constante. Es decir:

$$\boldsymbol{L} = m\,\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = \text{cte.} \qquad (4\text{–}1)$$

Por lo tanto: $|\, \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} \,|$ = cte. /m y en consecuencia:

$$\text{Área} = 1/2\ (\text{cte.}\ /m)\ \Delta t,$$

si 1/2 (cte./m) = K, entonces:

$$\text{Área} = K\ \Delta t. \qquad (4–2)$$

Por lo tanto, si el intervalo de tiempo considerado es el mismo, el área barrida por el radio vector del planeta será siempre la misma.

Esta segunda ley también permite concluir que los planetas no se mueven con la misma rapidez a lo largo de sus órbitas elípticas, pues, para que las áreas sean iguales, un determinado planeta tiene que recorrer un mayor arco, cuando está más cerca al Sol, que cuando está más lejos del mismo, en el mismo intervalo de tiempo. En consecuencia, los planetas se mueven más rápido cuando pasan por el *perihelio* (punto más cercano al Sol), y menos rápido cuando pasan por el *afelio* (punto más alejado del Sol).

Tercera ley de Kepler

Como ya se mencionó anteriormente, debido a que las excentricidades de las órbitas, de la mayoría de los planetas, son muy pequeñas, pueden ser consideradas circulares. Esta consideración permitió a Kepler establecer que la relación entre el cubo de la distancia al Sol, R^3, y el cuadrado del período orbital, T^2, es exactamente la misma para todos los planetas, es decir, no depende de las propiedades de ellos sino más bien de las características del objeto que hace de centro de rotación, esto es, del Sol. Por esta razón, a esta relación se le llama Ks.

$$\frac{R^3}{T^2} = Ks \qquad (4–3)$$

Con base en esta tercera ley, más adelante se verificará lo que Newton había planteado inicialmente: las fuerzas entre los planetas obedecen al inverso del cuadrado de la distancia entre ellos.

Deducción de la ley de la gravitación universal

Si se considera que los planetas se mueven en orbitas circulares, la aceleración centrípeta de cualquier planeta se puede calcular por la formula:

$$a_c = \omega^2 R$$

$$\text{como} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

entonces queda que:

$$a_c = \frac{4\pi}{T^2} R \qquad (4–4)$$

Se sabe por la *tercera ley de Kepler*, que:

$$\frac{R^3}{T^2} = K$$
, de donde:

$$\frac{1}{T^2} = \frac{K}{R^3} \quad (4\text{–}5)$$

De lo anterior se obtiene que:

$$a_c = \frac{4\pi^2 K}{R^2} \quad (4\text{–}6)$$

Esto significa que la aceleración de cualquier planeta es independiente de su masa e inversamente proporcional al cuadrado del radio de su orbita. Por la *segunda ley de Newton*, la fuerza que le imprime al planeta esta aceleración es:

$$F = m\,a_c = m\frac{4\pi^2 K}{R^2} \quad (4\text{–}7)$$

Es decir, la fuerza que actúa sobre cualquier planeta es directamente proporcional a su masa e inversamente proporcional al cuadrado de su distancia al Sol.

De acuerdo con la *tercera ley de Newton*, la fuerza con que el Sol actúa sobre el planeta es de la misma magnitud y de dirección opuesta a la fuerza con que el planeta actúa sobre el Sol. Si *M* es la masa del Sol, esta última fuerza puede escribirse como:

$$F' = M\,\frac{4\pi^2 K'}{R^2} \quad (4\text{–}8)$$

Como $F = F'$, se pueden igualar las Ecs. 4–7 y 4–8:

$$m\frac{4\pi^2 K}{R^2} = M\,\frac{4\pi^2 K'}{R^2}$$

Queda:

$$\frac{4\pi^2 K}{M} = \frac{4\pi^2 K'}{m} = G,$$

donde *G es la constante gravitacional* y por consiguiente:

$$4\pi^2 K = G\,M \quad (4\text{–}9)$$

Sustituyendo la Ec. 4–9 en la Ec. 4–7, queda:

$$F = G\,\frac{m\,M}{r^2} \quad (4\text{–}10)$$

Esta última es la expresión matemática de la ley de la gravitación universal si se admite la existencia de un campo gravitatorio para todos los cuerpos, la ley de Newton puede generalizarse para todos los cuerpos del universo enunciándola así: "**Dos cuerpos cualesquiera del universo se atraen mutuamente con una fuerza que es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que existe entre sus centros.**"

Las fuerzas con que se atraen las dos masas son un par de **acción y reacción**. La primera masa ejerce una fuerza de atracción sobre la segunda, que está dirigida hacía la primera; en cambio, la segunda masa ejerce otra fuerza de atracción sobre la primera, que está dirigida hacía la segunda

- $\mathbf{F}_{21}$: Fuerza ejercida por *m* sobre *M*
- $\mathbf{F}_{12}$: Fuerza ejercida por *M* sobre *m*

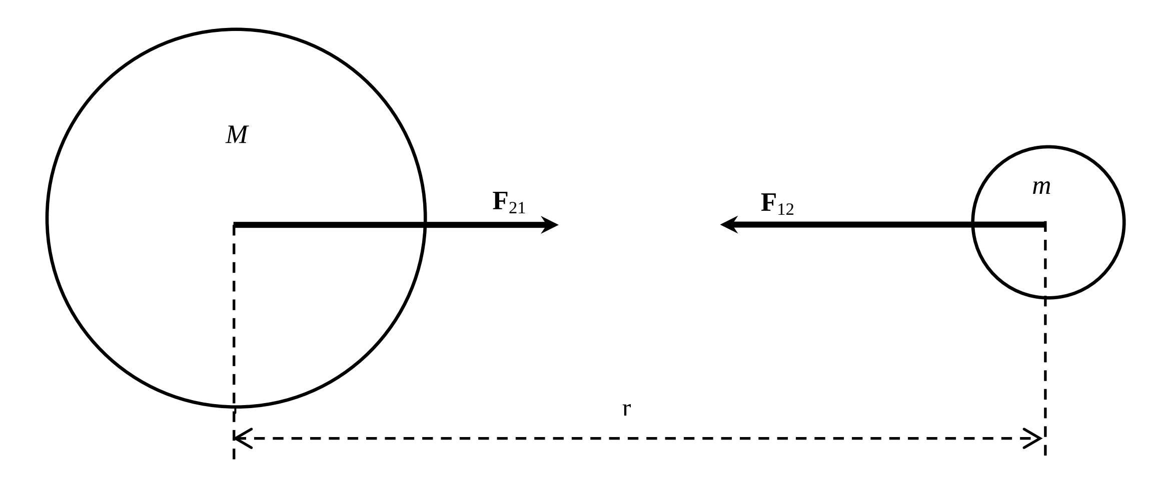


Figura 4–3

El valor de la constante de gravitación universal *G* fue determinada por Henry Cavendish, quien usó una balanza de torsión y encontró que:

$$G = 6.668 \times 10^{-11} \frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{Kg^2}}$$

Aplicaciones de la ley de la gravitación universal

Con la ley del inverso del cuadrado de la distancia, Newton calculó el período de la órbita de la Luna, usando valores generalmente aceptados para la fuerza de gravedad, en la superficie de la Tierra y para el radio de la Tierra. Su resultado, 29.3 días, distaba mucho de la realidad; el período observado es de 27.3 días. Cuestión que lo desanimó, pero con factores más exactos se pudo comprobar que la ley operaba en rigor.

Newton comparó la aceleración centrípeta de la Luna con la aceleración de la gravedad g=9.8 m/s^2. La aceleración centrípeta de la Luna es $a_c = v^2/r = 4\pi^2 r/T^2$, con $r = 3.84\times10^8$ m y T = 28 días = 2.36×10^6 s, se obtiene $a_c = 2.72\times10^{-3}$ m/s^2. Por consiguiente,

$$\frac{g}{a_c} = 3602 \approx (60)^2$$

.

Como el radio de la Tierra es 6.37×10^6 m y el radio de la órbita de la Luna es 3.84×10^8 m, se tiene:

$$(r/R)^2 = (384/6.37)^2 = (60)^2.$$

Por tanto,

$$(g/a_c) = (r/R)^2$$

Las aceleraciones de ambos cuerpos están en razón inversa del cuadrado de las distancias medidas desde el centro de la Tierra.

A continuación, se analizan algunas de las aplicaciones de la ley de Newton de la gravitación universal.

Aceleración gravitacional independiente de la masa de un cuerpo

El peso de un cuerpo es la fuerza dirigida hacia el centro de la Tierra, que ejerce el planeta sobre el cuerpo. Esta fuerza se puede atribuir a la gravitación universal. Debido a que la Ec. 4–10 se aplica con esferas o puntos másicos, se puede aplicar si se asume que la masa de la Tierra M, se encuentra concentrada en su centro y si las dimensiones del cuerpo son pequeñas, comparadas con el radio de la Tierra, R. La Ec. 4–10 indica que la atracción gravitacional de la Tierra sobre el cuerpo es:

$$F = G\ \frac{m\,M}{R^2}$$

donde m es la masa del cuerpo. Pero, esta fuerza es la que se conocía como el peso del cuerpo,

$$P = mg,$$

Igualando F y P se tiene:

$$G\ \frac{m\,M}{R^2} = m\,g \qquad \text{o}$$

$$g = G\ \frac{M}{R^2}$$

Por lo tanto, *la aceleración de la gravedad no depende de la masa del cuerpo que cae.*

Determinación de la masa de la Tierra

Los experimentos han demostrado que cualquier cuerpo, que cae libremente en las cercanías de la superficie terrestre, sufre una aceleración hacia el centro de la Tierra que es igual a 9.8 m/s^2. De acuerdo con las leyes del movimiento desarrolladas por Newton, esa aceleración implica la existencia de una fuerza constante, que proviene de la interacción del cuerpo en caída libre con nuestro planeta.

La fuerza que actúa sobre el cuerpo se llama peso y puede ser calculada multiplicando su masa por la aceleración, con la que está cayendo. Por otra parte, la fuerza de atracción gravitacional F, que actúa entre el cuerpo de masa m y la Tierra, puede ser calculada mediante la *ley de gravitación universal*, que en su forma matemática se expresa como:

$$F = G\ \frac{m\,M}{r^2}\ .$$

La masa de la Tierra es M, que es la cantidad que se va a determinar y r es la distancia que separa a las dos masas. Igualando el peso, del cuerpo de masa m, con la fuerza de atracción gravitacional que él sufre por la presencia de la masa terrestre se tiene que:

$$mg = G\ \frac{m\,M_{\mathrm{T}}}{R_{\mathrm{T}}{}^2}\ ;$$

donde R_{T} es el radio de la Tierra, ya que esa distancia es la que separa a ambos cuerpos, pues Newton demostró que es correcto considerar que toda la masa terrestre está concentrada en su centro. De esta última ecuación se tiene que:

$$M_{\mathrm{T}} = \frac{g\,R_{\mathrm{T}}{}^2}{G}\ .$$

Como la aceleración de la gravedad g, que sufre el cuerpo de masa m es igual a 9.81 m/s² y como ya se ha determinado que el radio terrestre R_{T} mide 6 400 km, sustituyendo esos valores en la ecuación anterior y realizando las operaciones correspondientes se tiene que:

$$M_T = 6.0 \times 10^{24}\ \text{kg}.$$

Alteraciones de las órbitas de los planetas

Aunque las órbitas planetarias están relativamente bien descritas por las *leyes de Kepler*, de acuerdo con la *Ley de la gravitación universal* habrán perturbaciones producidas por la presencia de otros planetas en el sistema solar y de los satélites naturales. Estas perturbaciones, proporcionales al cuadrado de sus distancias mutuas, hacen que el camino de los planetas oscile alrededor de una elipse media.

Si los planetas fueran mucho más masivos o si estuvieran mucho más próximos entre sí, su movimiento no podría ser descrito, ni siquiera en una primera aproximación, por las leyes de Kepler (obtenidas de la llamada aproximación de dos cuerpos, que en este caso son el Sol y el planeta). Habría que resolver el denominado problema de N cuerpos, donde N se refiere al Sol, el planeta y los otros cuerpos que perturban. Los movimientos resultantes serían muy complejos.

Descubrimiento de Neptuno y Plutón

La aplicación de la *ley de la gravitación universal de Newton* permitió descubrir dos planetas Neptuno y Plutón, demostrando así su capacidad, no solamente de explicar los fenómenos observados, sino también su enorme poder predictivo.

El descubrimiento de un cuerpo celeste, a 4 mil millones de kilómetros de la Tierra, mediante un simple cálculo matemático, representa un hito fundamental en la historia de la ciencia. Desde fines del siglo XVIII, los astrónomos tenían problemas en conciliar sus cálculos con las posiciones observadas de Urano.

Aplicando la *tercera ley de Newton*, a un supuesto cuerpo perturbador de la órbita, fue posible calcular la masa y la posición de este hipotético objeto con suficiente precisión como para descubrir Neptuno. Los cálculos teóricos fueron publicados por U. J. Leverríer (1811-1877) en junio de 1846 y el nuevo planeta fue observado efectivamente el 23 de septiembre siguiente, en el Observatorio de Berlín.

El entusiasmo provocado por este descubrimiento motivó la búsqueda de un posible noveno planeta. Los datos sobre la órbita de Neptuno no eran todavía muy precisos, lo que demoró 25 años la primera observación de Plutón, desde que fuera predicho en 1905. Estos descubrimientos también muestran que la fuerza de la gravedad actúa a gran escala, al menos su influencia llega hasta los confines más exteriores del sistema solar.

4.2 FUERZA ELÉCTRICA

Al analizar la ley de la gravitación universal de Newton, se concluyó que el peso de los cuerpos tiene su origen en la fuerza gravitacional, una interacción fundamental.

Otra interacción fundamental de la naturaleza es la electromagnética. Fuerzas que a diario manipulamos como, por ejemplo, la tensión de un cable, la compresión de un amortiguador, la fuerza de rozamiento, la normal, la fuerza ejercida por la presión del aire o del océano, entre otras, tienen su origen en la interacción electromagnética, que puede describirse clásicamente como eléctrica o magnética, dos fuerzas íntimamente relacionadas.

La fuerza eléctrica se origina en una propiedad fundamental de la materia, llamada carga eléctrica, que puede ser definida en función de cómo interactúan los cuerpos cargados. Dos cuerpos cargados se repelen o atraen mediante fuerzas llamadas eléctricas, que se manifiestan en adición a las fuerzas gravitacionales, descritas anteriormente.

Carga eléctrica

La materia presenta dos propiedades fundamentales, la masa y la carga eléctrica. A diferencia de la masa, en la naturaleza se encuentran dos clases de carga: la positiva y la negativa, nombres asignados convenientemente, debido a que un cuerpo que posee iguales cantidades de las dos clases de carga eléctrica, se comporta en forma similar a un cuerpo que no contiene cargas. En este caso se dice que el cuerpo está eléctricamente neutro, estado en el que se encuentran la mayoría de cuerpos que nos rodean.

La materia está formada por moléculas, que resultan de la combinación de átomos. Los átomos están constituidos, básicamente, por tres clases de partículas elementales: los protones y neutrones, que se encuentran en el núcleo atómico, y los electrones, que giran alrededor del núcleo. Las masas de estas partículas elementales se indican a continuación:

Protón	1.67252×10^{-27} kg
Electrón	9.10902×10^{-31} kg
neutrón	1.67482×10^{-27} kg

.

El protón tiene carga positiva y el electrón, carga negativa, sus magnitudes son exactamente iguales. El neutrón es eléctricamente neutro. Experimentalmente no se ha podido demostrar la existencia de una carga menor a la del protón o electrón. Por esta razón, la carga del electrón, $-e$, o del protón, $+e$, es considerada como una constante fundamental de la naturaleza. De lo expuesto, se deduce que la unidad de carga elemental es la carga e; sin embargo, en el SI, la unidad de carga eléctrica es el Coulomb, abreviado por C y definido de modo que la carga elemental, del electrón es:

$$e = -1.6021 \times 10^{-19}\ \text{C}.$$

Para tener la carga de 1 C se necesitan de alrededor de 6.24×10^{18} protones o electrones. Una carga libre de 1 C es enorme.

Cuantización de la carga

La carga de un cuerpo es un múltiplo entero de la carga elemental e. Esto quiere decir, que no existen cuerpos cuyas cargas sean $\frac{1}{4}e$, $\frac{1}{2}e$ o $\frac{3}{4}e$. Solo se pueden quitar o añadir electrones completos, entonces la carga, Q, de un cuerpo será:

$$Q = ne,$$

donde n es, necesariamente, un número entero.

Si bien la carga se encuentra siempre en múltiplos enteros de $+e$ o $-e$, esta relación no se detecta a escala macroscópica; así, por ejemplo, un cuerpo del tamaño de una pelota de tenis, cargada aún débilmente, tiene una carga del orden de 10^{-9} C, la cual involucra alrededor de 10^{10} electrones (o protones), añadir o quitar un electrón de ellos producirá un cambio de una parte en 10^{10} partes, ciertamente indetectable.

Por otro lado, consideremos un sistema microscópico como un átomo, en el cual hay pocos electrones a considerar, añadir o retirar uno de ellos causará un gran cambio. En esta situación la influencia de la carga e es significativa. Un átomo que pierde uno de sus electrones tiene una carga $+e$ y se convierte en un ion positivo. Por su parte, un átomo que tiene un exceso de electrones se convierte en un ion negativo.

En general, un cuerpo que pierde electrones se carga positivamente y aquel, que tiene un exceso de electrones, se carga negativamente. Los fenómenos relacionados con la redistribución de cargas, en un sistema aislado, se caracterizan porque la suma algébrica de las cargas eléctricas es constante. La carga es una cantidad escalar que sigue las reglas operacionales de las cantidades escalares.

Cuerpos conductores y aislantes

Los materiales, según su comportamiento eléctrico, se clasifican en:

1. Conductores o transmisores de carga. Que pueden ser de primera y segunda clase. Los de primera clase son los metales, que transmiten o conducen la carga sin implicación de un cambio químico. Entre los de segunda clase, se encuentran las sales fundidas, las Soluciones salinas, las Soluciones ácidas y las alcalinas. Los metales se caracterizan por la facilidad que presentan para el desprendimiento de sus electrones exteriores, los cuales se mueven libremente por entre los átomos, los núcleos positivos y el resto de electrones, que permanecen fijos. Los conductores de segunda clase tienen iones (átomos o moléculas cargadas), cuyo movimiento transmite la carga eléctrica e implica un cambio químico.

2. No conductores, aisladores o dieléctricos. Son materiales que no transmiten carga eléctrica. Los dieléctricos tienen iguales cantidades de carga positiva y negativa y sus electrones no se desprenden de los átomos correspondientes. El material dieléctrico, tanto en su conjunto, como en todas sus partes, es neutro; sus átomos y moléculas únicamente pueden orientarse ante la presencia de una carga externa cercana. Esta orientación de las cargas se denomina polarización dieléctrica. Materiales típicos de esta clase son el aire, el aceite, el vidrio, el caucho y la porcelana, entre otros.

3. Semiconductores. Son los materiales intermedios entre los conductores y los no conductores. Ejemplos de estos materiales son el silicio y el germanio, que son utilizados en la industria electrónica.

Formas de obtener cuerpos cargados eléctricamente

Es posible cargar eléctricamente cuerpos mediante los siguientes métodos:

1. Por frotamiento. Al frotar dos objetos de diferente naturaleza química, como por ejemplo una varilla de vidrio con un pedazo de seda, la varilla pierde electrones y se carga positivamente; mientras que, la seda adquiere una carga de igual magnitud, pero negativa.

2. Por contacto. Inicialmente el cuerpo *A*, de la Fig. 4–4, está cargado negativamente y el cuerpo *B* es eléctricamente neutro. Al poner en contacto los cuerpos, los electrones de *A* pasan al cuerpo *B*. El proceso de transferencia de electrones termina cuando las fuerzas de repulsión entre los electrones del cuerpo *A* igualan a las fuerzas de repulsión de *B*. Como resultado, el cuerpo *B* adquiere un exceso de electrones, entonces se dice que *B* está electrizado o cargado, negativamente, por contacto.

3. Por inducción. A la esfera conductora *B*, de la Fig. 4–5, que no interactúa con ningún otro cuerpo (sistema aislado), se le acerca, sin tocarlo, el cuerpo *A*, cargado negativamente. La región de la esfera más lejana al cuerpo *A* se cargará negativamente, debido a que los electrones libres del cuerpo *B* son repelidos por los de *A*. Cuando conectamos la esfera *B* a Tierra, con un conductor, por este viajarán los electrones en exceso a Tierra, con lo cual la esfera *B* queda con deficiencia de electrones y se carga positivamente. La Tierra es considerada como un sumidero enorme, donde emigran los electrones libres.

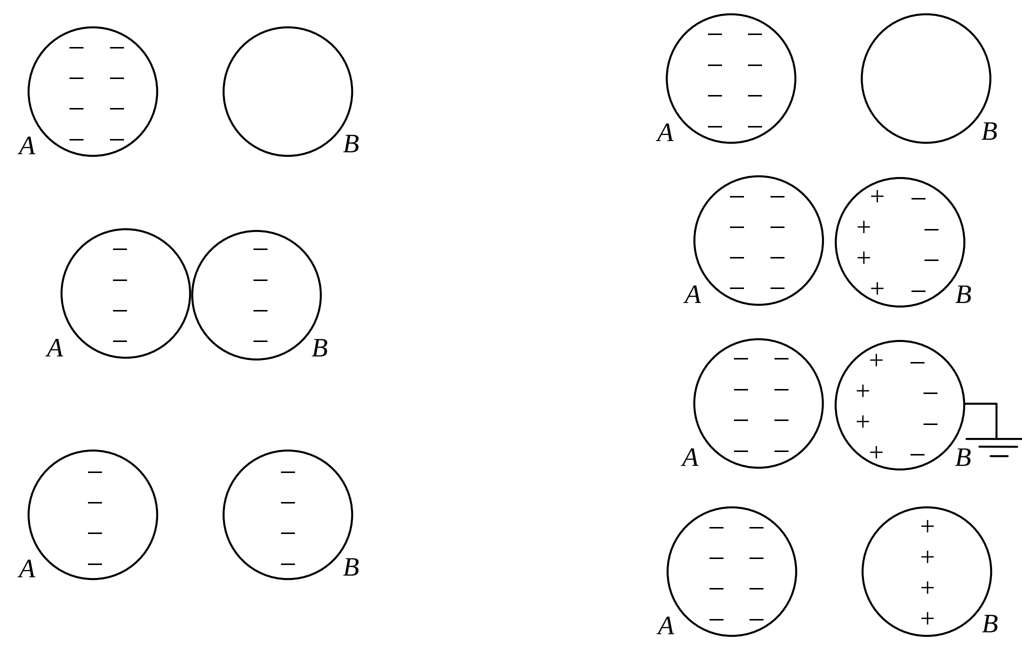


Figura 4–4

Figura 4–5

Ley de Coulomb

A diferencia de la fuerza gravitacional, que Solamente es atractiva, las fuerzas eléctricas entre dos cuerpos cargados pueden ser de atracción o de repulsión. Si los cuerpos están cargados, con cargas de signo contrario, se atraen; y, si están cargados con cargas del mismo signo, se repelen. (Ver Fig. 4–6)

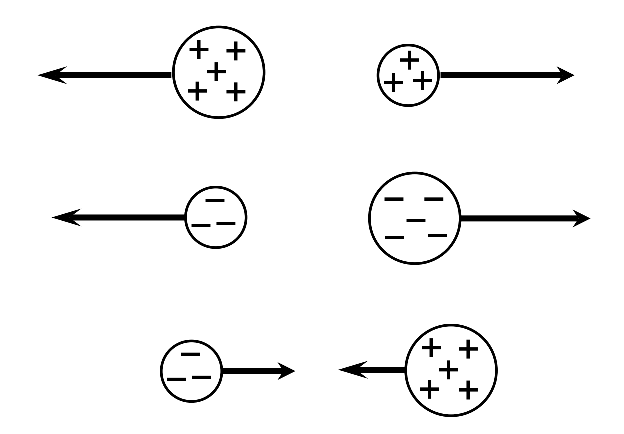


Figura 4–6 Fuerzas eléctricas de atracción y repulsión

Según la tercera ley de Newton, la fuerza que ejerce un cuerpo *A*, sobre otro *B*, de atracción o repulsión es de igual magnitud y dirección opuesta a la que ejerce *B* sobre *A*; en el presente caso, esta igualdad de fuerzas no requiere igualdad de cargas en los cuerpos que interactúan y nada tiene que ver la forma de ellos. Estas fuerzas tampoco dependen del movimiento de los cuerpos, aunque si estas fuerzas no están equilibradas, influirán en su movimiento de acuerdo con la segunda ley de Newton.

Debido a que estas fuerzas se manifiestan incluso cuando los cuerpos cargados están en reposo, se las denomina fuerzas electrostáticas y porque fueron cuantificadas por Coulomb, también se las conoce como fuerzas de Coulomb.

Encontrar el valor de la fuerza electrostática entre objetos cargados es una tarea muy compleja, porque la magnitud de la fuerza depende del tamaño, forma y distribución de carga de los dos cuerpos que interactúan; así como, de sus cargas, de su separación y de la naturaleza del medio en el que están colocados. Sin embargo, Coulomb consideró cuidadosamente una serie de detalles experimentales en sus estudios con dos esferas cargadas del mismo signo, que le permitieron formular la ley de la fuerza electrostática entre dos cargas puntuales (o esferas) inmóviles, que establece que su magnitud es proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas y que se expresa matemáticamente, así:

$$F_e = \frac{kq_1q_2}{r^2}, \qquad (4–11)$$

donde q_1 y q_2 son las cargas de los cuerpos , r es su separación (si los cuerpos son esféricos, r es la separación entre sus centros) y k es una constante que depende del medio en el cual se encuentran los cuerpos.

$k = 9 \times 10^{9}$ N m^2/C^2, para el vacío.

Si el medio es el aire, k tiene prácticamente el mismo valor. A veces es conveniente expresar la ley de Coulomb, en términos de ε, la constante dieléctrica o de permitividad del medio, como:

$$F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}, \qquad (4–12)$$

donde $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, con $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ C^2/N m^2, la permitividad del espacio libre.

Con la Ec. (4–11), solamente se determina la magnitud de la fuerza. Para determinar su dirección se deben realizar gráficos semejantes a los de la Fig. 4–6, en los cuales se debe considerar que la dirección de la fuerza se encuentra, siempre, en la línea que une a las partículas (o en la línea que une los centros, si son esferas.

Fuerzas eléctricas sobre sistemas neutros

Polarización

Al frotar un esferográfico con un pañuelo, el esferográfico se carga negativamente. Cuando se acerca el esferográfico cargado a pedacitos de papel, eléctricamente neutros, los electrones del papel que están más cerca al esferográfico se alejan y aparece una carga positiva en el extremo del papel más cercano al esferográfico, entonces aparece una fuerza eléctrica que hace que el esferográfico atraiga a los pedacitos de papel, como puede verse en la Fig.4–7.

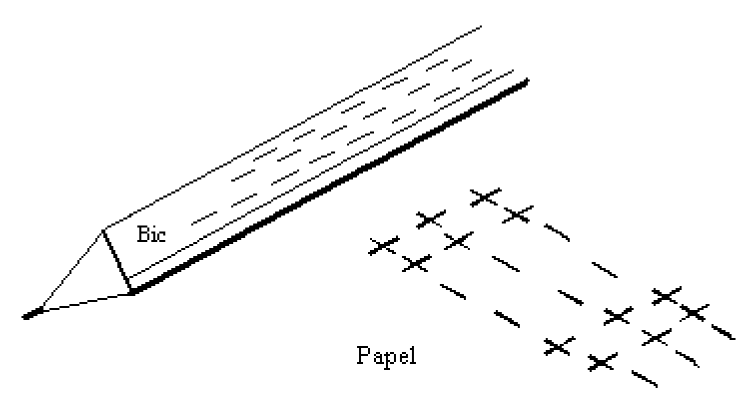


Figura 4–7 Polarización de la carga en el papel

Fuerzas adhesivas

Dos pedazos de vidrio se pueden juntar de tal manera que al levantar el uno, puede soportar el peso del otro sin desprenderse. La fuerza que provoca tal unión es la interacción de los núcleos positivos del un pedazo y los electrones del otro, que generan una fuerza de atracción electrostática. A pesar de que los átomos constituyen un sistema neutro, las fuerzas eléctricas entre ellos es la responsable de tal unión. Un líquido establece un excelente contacto con un sólido cuando lo moja, esta fuerza de atracción es significativa. Tales fuerzas se denominan adhesivas y su origen también es eléctrico.

Enlace químico

Si dos átomos neutros están separados por una distancia, *r*, menor a un diámetro atómico (a_0, aproximadamente ≈ 10^{-10} m) hay una considerable superposición de las nubes electrónicas de los átomos, que generan una fuerza neta repulsiva entre ellos. A separaciones mayores, se genera una interacción atractiva. Cuando la separación *r* crece, esta fuerza atractiva se debilita rápidamente, con el inverso de r^7 y llega a ser insignificante cuando *r* está comprendida entre 8 y 9 veces a_0. La Fig.4–8 muestra cómo varía la fuerza electrostática entre dos átomos, en función de su separación, *r*, y muestra que para algún valor de *r*, la magnitud de la fuerza *F* debe ser nula, y el sistema debe estar en equilibrio. Este es el valor de *r*, para el cual se forma una molécula estable. Las fuerzas electrostáticas son la base de la explicación de los fenómenos químicos.

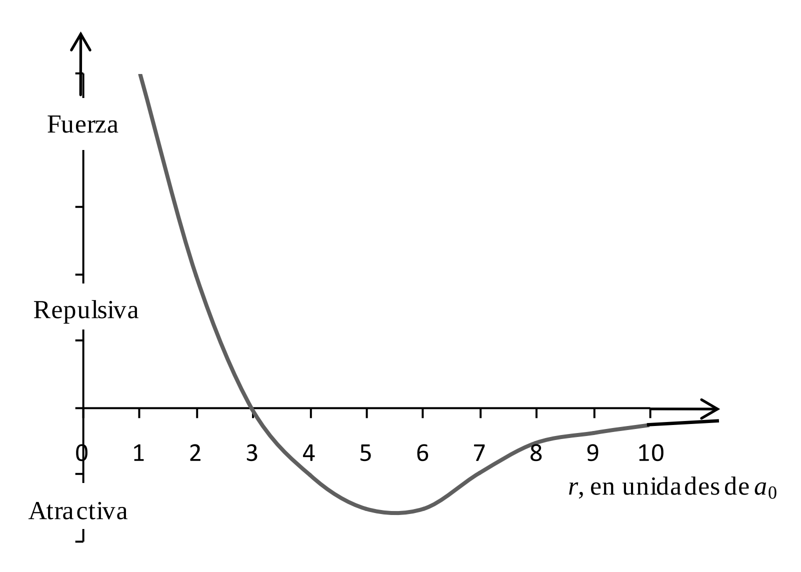


Figura 4–8 Fuerza electrostática entre dos átomos separados una distancia *r*

Polaridad de las moléculas

Polares son aquellas moléculas eléctricamente neutras, en las cuales hay una separación de sus cargas positivas y negativas, que generan un polo positivo en un punto y uno negativo, de igual magnitud, en otro. Estas moléculas actúan como un dipolo eléctrico. Entre las moléculas polares aparecen fuerzas eléctricas de atracción o repulsión, cuyo valor disminuye con la distancia, más rápidamente que las fuerzas de Coulomb, puesto que son inversamente proporcionales, no al cuadrado sino hasta el séptimo grado de la distancia que los separa. A estas se conocen como fuerzas de van der Waals.

Tensión superficial

Una aguja, recubierta con una ligera capa de grasa, puede colocarse cuidadosamente sobre la superficie del agua y formará una pequeña depresión y permanecerá, en reposo, sin hundirse, a pesar de que su densidad es mucho mayor que la del agua. Las moléculas de agua se atraen, unas a otras, por medio de fuerzas eléctricas. Cada molécula atrae a las moléculas adyacentes y forman una película superficial, que se opone al hundimiento de la aguja. A esta fuerza de origen eléctrico se denomina tensión superficial y es originada por los puentes de hidrógeno, formados por la polaridad de sus átomos de hidrógeno y oxígeno.

Humectación de un sólido

Si se coloca una placa de vidrio, sujeta mediante hilos a un resorte sensible, en la superficie del agua, contenida en un recipiente, y se eleva suavemente se observa que la placa no se separa del agua y el resorte se estira. Por el alargamiento del resorte se puede deducir la existencia de las fuerzas de atracción existente entre las moléculas de agua y las del vidrio. Si la magnitud de la fuerza aumenta, la placa finalmente se separa del agua, con la particularidad de que la placa se encuentra mojada. Esto quiere decir que, con la fuerza aplicada, Solamente se rompió la atracción entre las moléculas del agua. Cuando un líquido humedece a un sólido, la fuerza eléctrica entre las moléculas del líquido es más débil que la generada entre las moléculas del líquido y el sólido.

Hilos

Para romper un hilo de seda de 1 mm^2 de sección se necesita una fuerza aproximada de 250 N. Esto quiere decir que debemos aplicar 250 N para vencer las fuerzas de atracción entre las moléculas que se encuentran en el lugar donde se rompe el hilo.

En resumen, las fuerzas eléctricas a escala atómica y molecular son de fundamental importancia para explicar las propiedades macroscópicas de la materia.

Comparación entre la fuerza eléctrica y la gravitacional

Semejanzas

La sorprendente similitud entre la ley de la gravitación universal y la ley de la fuerza electrostática sugiere que algunas propiedades de estas dos clases de fuerzas sean similares.

De acuerdo con las expresiones de las Ecs. (4–7) y (4–8), se observa que los modelos matemáticos son equivalentes. La fuerza gravitacional (F_G) es proporcional al producto de las masas, que intervienen, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa. Por su parte, la fuerza electrostática (F_e) es proporcional al producto de las cargas, que intervienen, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.

Ambas ecuaciones se aplican para describir la intensidad de la interacción entre partículas o esferas uniformes. La F_G evalúa la masa de la sustancia; mientras que, la F_e, la carga de la sustancia. Tanto la masa, como la carga, son propiedades básicas de la materia.

Otra característica interesante de estas leyes se relaciona con el hecho de que es necesario alejarse infinitamente de la masa o la carga, para escapar completamente de su influencia; es decir, el rango de acción de la fuerza gravitacional y eléctrica es de todo el espacio.

Estas dos fuerzas se ubican a lo largo de la recta que une las masas o las cargas, por lo que se las denomina fuerzas centrales. Debido a la tercera ley de Newton, las fuerzas de interacción entre masas o cargas son de igual magnitud y están en dirección contraria, una de otra, a lo largo de la recta que las une.

Diferencias

La fuerza gravitacional está relacionada con la masa de los cuerpos que, como se conoce, es Solo de tipo positivo y genera una fuerza necesariamente de atracción. En cambio, la fuerza electrostática está relacionada con la carga eléctrica, que puede ser de tipo positivo o negativo, por lo que generan fuerzas de atracción o repulsión.

Todos los cuerpos poseen masa, por tanto experimentan siempre una interacción gravitacional; pero, no todos los cuerpos interactúan eléctricamente, Solo lo hacen los cuerpos que están cargados.

La masa, a más de ser la responsable de la fuerza gravitacional, se encuentra relacionada con el movimiento de los cuerpos, como una cantidad que se opone al movimiento (inercia). Por el contrario, la carga es una cantidad independiente del movimiento, a pesar de que la fuerza eléctrica sí podría mover a un cuerpo.

Si bien la constante G es universal y su valor es 6.67×10^{-11} N m^2/kg^2, para cualquier lugar o sistema, la constante k depende del medio que rodea a las cargas, así para el vacío o el aire es de 9×10^9 N m^2/C^2.

La magnitud de la fuerza gravitacional entre partículas elementales, aisladas, es considerablemente pequeña en comparación con las fuerzas eléctricas. La relación entre las magnitudes de la fuerza electrostática y la gravitacional, que se ejercen mutuamente dos electrones, es la siguiente:

$$\frac{F_e}{F_G} = \frac{\dfrac{ke^2}{r^2}}{\dfrac{Gm^2}{r^2}} = \frac{9\times10^9(1.6\times10^{-19})^2}{6.66\times10^{-11}(9.1\times10^{-31})^2} = 4.17\times10^{42}.$$

Como se ve, la magnitud de la fuerza eléctrica entre dos electrones es enorme, comparada con la fuerza gravitacional. Las fuerzas gravitacionales son importantes Solo cuando grandes masas están involucradas.

Campo eléctrico

Las fuerzas gravitacionales y eléctricas aparecen por la interacción directa entre masas o entre cargas eléctricas, respectivamente. Esta interacción directa se denomina acción a distancia. Si se introduce una modificación a este punto de vista, se logra una aproximación al concepto de campo, que se ha comprobado de gran importancia en la teoría y en la práctica.

El campo eléctrico se define como una distorsión del espacio, que aparece cuando tenemos una fuente (tal como $+Q$), que altera el espacio que la rodea e informa a un objeto de prueba ($+q$), que $+Q$ existe y está presente a una distancia r. El mensaje es detectado por $+q$, como una fuerza ($\mathbf{F}_1$) que actúa sobre ella, en la dirección que se muestra en la Fig. 4–9.

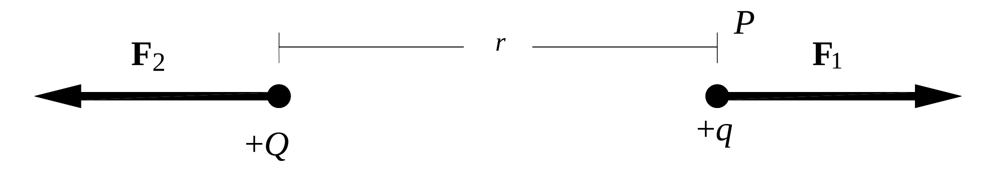


Figura 4–9

El campo eléctrico es una realidad física, que no se puede detectar con los sentidos; pero, se pueden evaluar sus efectos. La fuerza eléctrica $\mathbf{F}_1$, sobre $+q$, es una manifestación del campo eléctrico. En la región del espacio libre, comprendido entre un par de placas metálicas paralelas, que están cargadas opuestamente, se genera un campo eléctrico uniforme que almacena cantidad de movimiento y energía, que en ciertas circunstancias puede ser suficiente para matar a un ser humano. Estos efectos constituyen pruebas fehacientes de que los campos eléctricos son reales.

La definición de campo eléctrico se relaciona con la descripción de cómo se cuantifica. Si se coloca, en algún punto P, una carga de prueba $+q$, que desempeña el papel de "medidor de campo", por lo que experimenta una fuerza $\mathbf{F}$ que no experimentaría si no estuviera cargada, se dirá que en el punto P existe un campo eléctrico.

El campo no es generado por la carga de prueba, $+q$, sino por alguna otra carga externa. La carga $+q$ Solamente investiga la presencia del campo. La relación $\mathbf{F}/+q$ da una característica física del campo, se denomina intensidad del campo eléctrico ($\mathbf{E}$) y constituye su definición operacional:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{+q}, \qquad (4\text{–}10)$$

El campo eléctrico es una cantidad vectorial, que se obtiene al dividir una cantidad vectorial, $\mathbf{F}$, para una cantidad escalar, $+q$, por lo tanto el campo y la fuerza tienen la misma dirección. Si en el punto P se coloca una carga negativa, la fuerza que actúa sobre ella tendría dirección opuesta a la de la intensidad de campo.

La unidad de la intensidad de campo eléctrico (simplemente denominado campo eléctrico) en el sistema internacional es [N/C]. Por ejemplo, si se coloca una carga de 10^{-9} C, en algún punto P, donde actúa una fuerza de 10^{-7} N sobre la carga, quiere decir que en ese punto existe un campo eléctrico de magnitud 100 N/C. Si se reemplaza la carga $+q$ por otra de 5×10^{-9} C, la intensidad de campo no tendrá una magnitud de 20 N/C. El lector deberá recordar que la magnitud de la fuerza también depende de $+q$ y que el campo depende simultáneamente de F y de $+q$, para encontrar el valor correcto.

El campo eléctrico no está definido por $+q$, sino por otra u otras cargas cercanas a P, tal es el caso, que si se retira la carga $+q$, el campo eléctrico en el punto P seguirá presente y se mantendrá constante. Sin embargo, si en el punto P se coloca un cuerpo cuya carga $+q$ sea considerable, ella influirá sobre las cargas que originan el campo eléctrico en ese punto, se reubicarán las cargas y esto sí provocará un cambio de **E**, en el punto P. El campo se define con una carga de prueba $+q$, que sea lo suficientemente pequeña, capaz que no perturbe a las cargas que producen el campo.

Un campo eléctrico se puede visualizar con las llamadas líneas de fuerza, que son líneas imaginarias que se conciben de modo que la tangente, a una línea de fuerza, en cualquier punto, es siempre paralela a **E**, en ese punto. Por tanto, una tangente a un punto de la línea de fuerza, determina la dirección de **E** y, a la vez, de **F**, que actuaría sobre una carga de prueba situada en ese punto del campo. Ver Fig. 4–10.

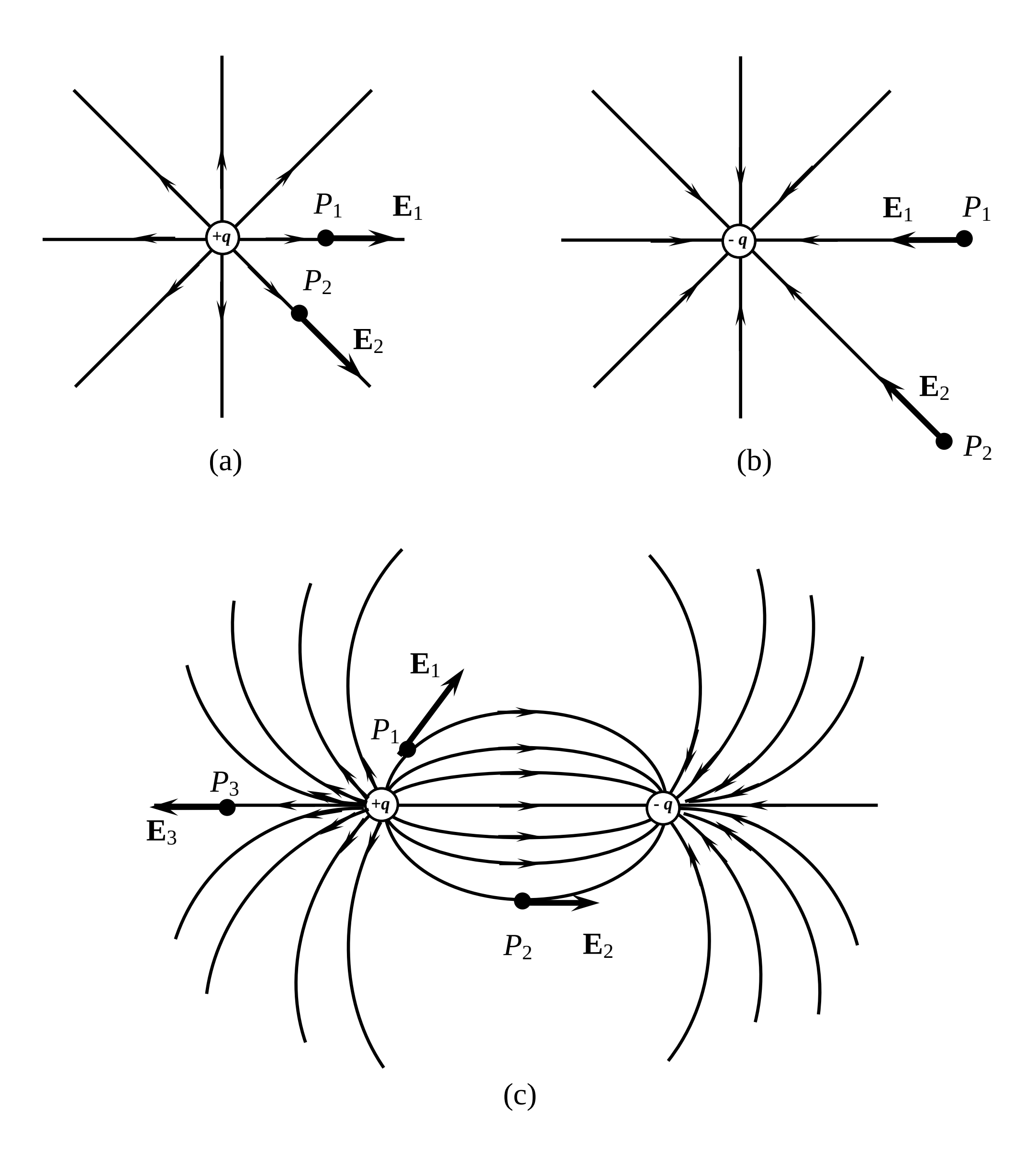


Figura 4–10 Líneas de fuerza y vectores campo eléctrico **E**

En la Fig. 4–10, se muestran las líneas de fuerza y los vectores campo eléctrico, **E**, en diferentes puntos, producidos por (a) una partícula cargada positivamente (+*q*), (b) una partícula cargada negativamente (–*q*) y (c) un dipolo eléctrico, que consiste en un par de cargas iguales en magnitud, pero de signo contrario (+*q* y –*q*), separadas una distancia *r*.

Es necesario indicar que para cualquiera de estos campos se podría dibujar un número infinito de líneas de fuerza, que se extienden a las tres dimensiones del espacio.

Las propiedades más importantes de las líneas de fuerza son las siguientes:

1. Toda línea de fuerza sale de una carga positiva y termina en una carga negativa.
2. Las líneas de fuerza no se cruzan, si así sucediera en un mismo punto se tendrían dos campos eléctricos,
3. El movimiento de una partícula cargada no se realiza a lo largo de una línea de fuerza. La dirección de su movimiento y su trayectoria se determinan en función de la fuerza, de la velocidad inicial y de la inercia de la partícula.

La ecuación del campo eléctrico también se puede expresar como:

$$\mathbf{F} = +q\mathbf{E}\,, \qquad (4\text{–}11)$$

si por algún medio se conoce el campo **E**, en los puntos de una región del espacio, con la Ec. (4–4) se puede calcular la fuerza que actúa sobre la carga +*q*, que pasa por esos puntos, con la segunda ley de Newton se determina la aceleración de la partícula en cada punto. Es decir, se puede determinar completamente el movimiento de la partícula, de carga +*q* y masa *m*.

Intensidad del campo eléctrico generado por cargas puntuales

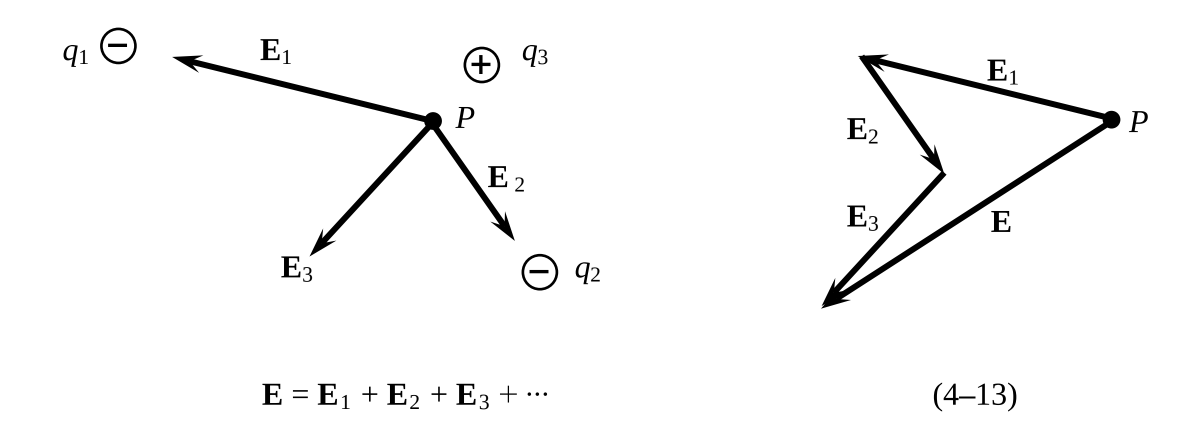
El campo eléctrico generado por una carga puntual *Q*, en reposo, es igual a la fuerza que actúa sobre una carga de prueba +*q*, que está en reposo en el punto *P*, a una distancia *r*, dividida para la carga de prueba, +*q*. A partir de las Ecs. (4–8) y (4–10) se puede demostrar fácilmente que la magnitud del campo generado por una carga puntual es:

$$E = \frac{kqQ}{qr^2} = \frac{kQ}{r^2}\,. \qquad (4\text{–}12)$$

La Ec. (4–10) determina el campo en función de la fuerza electrostática, su principal manifestación. En cambio, la Ec. (4–12) define el campo en términos de la carga puntual *Q*, que origina el campo. La dirección de **E** se encuentra a lo largo de la línea que une la posición que ocupa la carga *Q* y el punto *P*.

La Ec. (4–12) no puede ser utilizada para calcular los campos eléctricos producidos por cargas distribuidas en objetos metálicos, como por ejemplo varillas, láminas o esferas. En algunos casos, se debe utilizar cálculo integral o análisis matemático avanzado, como variable compleja.

Para determinar el campo eléctrico resultante de la acción de un número dado de cargas puntuales q_1, q_2, q_3, etc., colocadas en diferentes sitios cercanos al punto *P*, se deben sumar vectorialmente los campos $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$, etc. generados en *P*, por cada una de las cargas puntuales, como se ilustra en la Fig. 4–11.



$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + \cdots \qquad (4\text{–}13)$$

Figura 4–11 Campo eléctrico resultante

PROBLEMAS

4.1 FUERZA GRAVITACIONAL

1. Si se considera que la Tierra tiene forma esférica con un radio aproximado de 6 400 km. Determine, la relación existente entre las fuerzas gravitatorias sobre la superficie terrestre y a una altura de 144 km por encima de la misma.

$G = 6.67\times10^{-11}\ Nm^2/kg^2$
$M_T = 5.98\ 10^{24} kg$
$R_T = 6\ 400\ km$

$$\frac{F_h}{F_T} = \frac{m\ g_h}{m\ g_T} = \frac{\frac{GM_T m}{R_T^2}}{\frac{GM_T m}{(R_T + h)^2}} = \frac{(R_T + h)^2}{R_T^2} = \frac{(6400\times10^3 + 144\times10^3)^2}{(6400\times10^3)^2} = 1.045$$

$$\frac{F_h}{F_T} = 1.045$$

2. La nave espacial Discovery, lanzada en octubre de 1998, describía en torno a la Tierra una órbita circular con una velocidad de 7.62 km /s.

a) ¿A qué altitud se encontraba?
b) ¿Cuál es su período? ¿Cuántos amaneceres contemplaban cada 24 horas los astronautas que viajaban en el interior de la nave?

$G = 6.67\times10^{-11}\ N\ m^2/kg^2$
$M_T = 5.98 \times 10^{24}\ kg$
$R_T = 6370\ km$
$v = 7.62\ km/s = 7\ 620\ m/s$

a)

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GM_T m}{r^2} \Rightarrow r = \frac{GM_S}{v^2} = \frac{6.67\times10^{-11}.5.98\times10^{24}}{7620^2} = 6869.37\times10^3\,m = 6869.37\ km$$

$$h = r - R_T = 499.37\ km$$

b)

$$T = \frac{2\pi\pi}{v} = \frac{2\pi\ 6869.37\times10^3}{7620} = 5664.24\ s = 1.57\ h$$

$$24\ h\ \frac{1\ \text{amanecer}}{1.57h} = 15\ \text{amaneceres}$$

3. Un satélite artificial de 200 kg gira en una órbita circular a una altura "h" sobre la superficie de la Tierra. Sabiendo que a esa altura el valor de la aceleración de la gravedad es la mitad del valor que tiene en la superficie terrestre, averigüe la velocidad del satélite.

Gravedad en la superficie terrestre $g_0 = 9.8\ m/\ s^2$
Radio medio de la tierra $R_T = 6.37\times10^3$ km
m= 200 kg

$$g_h = \frac{\mathbf{g_0}}{\mathbf{2}}$$

$$g_0 = \frac{GM_T m}{R_T^2}$$

$$g_h = \frac{g_0}{2} = \frac{GM_T m}{(R_T + h)^2}$$

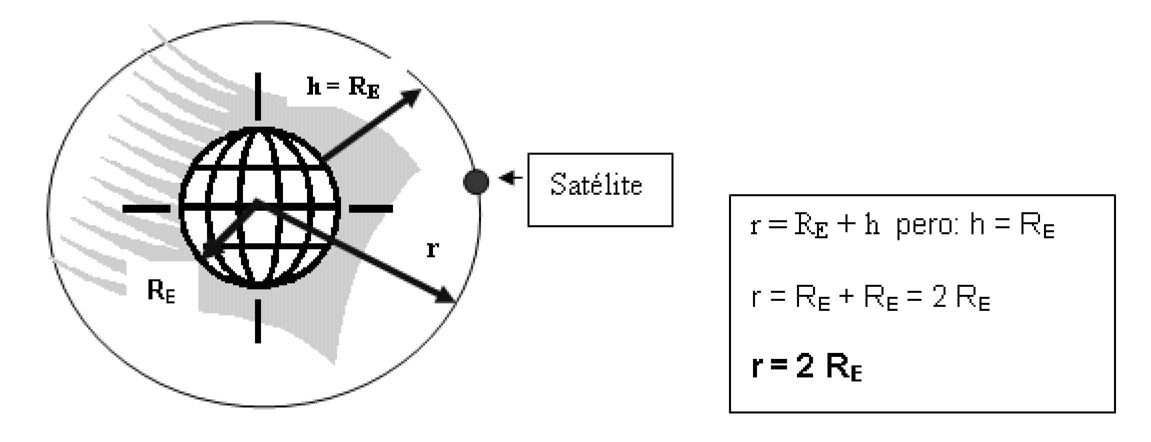
$$\frac{g_0}{\frac{g_o}{2}} = \frac{\frac{GM_T m}{R_T^2}}{\frac{GM_T m}{(R_T+h)^2}} \Rightarrow 2 = \frac{(R_T+h)^2}{R_T^2} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{R_T+h}{R_T} \Rightarrow R_T + h = \sqrt{2}R_T$$

$$\frac{mv^2}{R_T+h} = \frac{GM_T m}{(R_T+h)^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T+h}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_T}{\sqrt{2}R_T}} =$$

$$= \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{\sqrt{2}R_T}} = \sqrt{\frac{9.8\ 6.37\times10^6}{\sqrt{2}}} = 6643.93\ \text{m/s}$$

4. Un satélite de 300 kg de masa se encuentra en una órbita circular alrededor de la tierra a una altitud igual al radio medio de la tierra. Encuentre:
a) La rapidez orbital del satélite
b) El periodo de su revolución
c) La fuerza gravitacional que actúa sobre él.

R_E = radio de la tierra = 6.37×10^6 m
h = La distancia entre el satélite y la superficie de la tierra, en este problema es igual a R_E



$\sum F_Y = m\,a$ como el satélite se mantiene en órbita circular alrededor de la tierra. La fuerza de la gravedad hará las veces de fuerza centrípeta.

$$\frac{G\ M_E\ m}{r^2} = m\ a$$

Ordenando la ecuación

$$m\ \frac{G\ M_E}{r^2} = m\ a$$

$$m\ g = m\ a$$

De lo anterior se deduce que: $g = \dfrac{G\ M_E}{r^2}$

$$m\ \frac{G\ M_E}{r^2} = m\ a$$

$$m\ \frac{G\ M_E}{r^2} = m\ \frac{V^2}{r}$$

Se cancela la masa m y r

$$\frac{G\ M_E}{r} = V^2 \quad \text{pero: } r = 2\ R_E$$

Reemplazando $r = 2\ R_E$

$$\frac{G\ M_E}{2\,R_E} = V^2$$

Multiplicamos por R_E

$$\frac{G\ M_E}{2\,R_E}\ \frac{R_E}{R_E} = V^2$$

Ordenando la ecuación

$$\frac{G\ M_E}{(R_E)^2}\ \frac{R_E}{2} = V^2$$

Pero: $g = \dfrac{G * M_E}{r^2}$

Reemplazando g (gravedad) en la ecuación, tenemos:

$$g \quad \frac{R_E}{2} = V^2 \qquad V = \sqrt{g \quad \frac{R_E}{2}}$$

$$V = \sqrt{g \quad \frac{R_E}{2}} = \sqrt{9.8 \quad \frac{6.37 \times 10^6}{2}} = \sqrt{9.8 \quad 3.185 \times 10^6} = \sqrt{31.213 \times 10^6} = 5.58685 \times 10^3 \ \frac{m}{s}$$

V = 5 586.85 m/s

c) El periodo de su revolución (satélite)

Para calcular el periodo, sabemos que la rapidez promedio de una órbita circular del satélite es:

$$v = \frac{\text{longitud de la orbita del satelite}}{\text{periodo}} = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi(2 R_E)}{T} = \frac{4\pi R_E}{T}$$

Despejamos el periodo

$$T = \frac{4\pi R_E}{v} = \frac{4 \quad 3.14 \quad 6.37 \times 10^6}{5586.85} = \frac{80047780.81}{5586.85} = 14327.89 \quad [s]$$

$$T = 14327.89 \ [s] \ \frac{1 \text{minuto}}{60 \text{seg}} = 238.79 \text{ minutos}$$

T = 238.79 minutos

c) La fuerza gravitacional que actúa sobre él

$F_R = \dfrac{G \quad M_E \quad m}{r^2}$ pero: $r = 2 R_E$

$$F_R = \frac{G \quad M_E \quad m}{(2 R_E)^2} = m \quad \frac{G M_E}{4 (R_E)^2} = \frac{m}{4} \quad \frac{G M_E}{(R_E)^2}$$

Pero: $g = \dfrac{G \quad M_E}{(R_E)^2}$ Reemplazando la gravedad en la ecuación anterior tenemos:

$$F_R = \frac{m}{4} \quad \frac{G M_E}{(R_E)^2} = \frac{m}{4} \quad g$$

$$F_R = \frac{m}{4} \quad g = \frac{300}{4} \quad 9.8$$

F_R = 735 N

5. El período de revolución del planeta Júpiter en su órbita alrededor del Sol es aproximadamente 12 veces mayor que el de la Tierra en su correspondiente órbita. Considerando circulares las órbitas de los dos planetas, determine:

a) La razón entre los radios de las respectivas órbitas.

b) La razón entre las aceleraciones de los dos planetas en sus respectivas órbitas.

$T_J = 12\ T_T$

a)

$$T_J^2 = CR_{OJ}^3$$

$$T_T^2 = CR_{OT}^3$$

$$\frac{T_J^2}{T_T^2} = \frac{R_{OJ}^3}{R_{OT}^3} \Rightarrow \frac{12^2 T_T^2}{T_T^2} = \frac{R_{OJ}^3}{R_{OT}^3} \Rightarrow \sqrt[3]{144} = \frac{R_{OJ}}{R_{OT}}$$

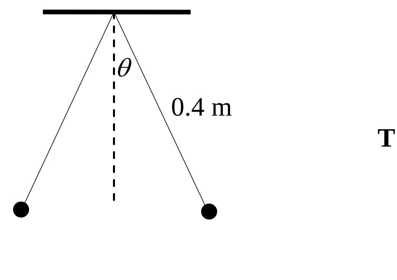
$$\frac{R_{OJ}}{R_{OT}} = 5.24$$

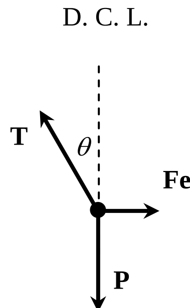
b)

$$\frac{a_J}{a_T} = \frac{\dfrac{GM_S}{R_{OJ}^2}}{\dfrac{GM_S}{R_{OT}^2}} = \frac{R_{OT}^2}{R_{OJ}^2} = \frac{1}{(5.24)^2} = \quad 0.036$$

4.2 FUERZA ELÉCTRICA

6. Dos partículas, de 45 g y que tienen una carga *Q* cada una, están suspendidas de un mismo punto por medio de cuerdas de masas despreciables y longitud de 40 cm. Cuando el sistema está en equilibrio, las masas se hallan separadas 2 cm. Determine el valor de la carga *Q*.





Como la esfera está en equilibrio:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0$$

$$Fe - T\text{sen}\theta = 0 \qquad T\cos\theta - mg = 0$$

$$Fe = T\text{sen}\theta \qquad T\cos\theta = m\,g$$

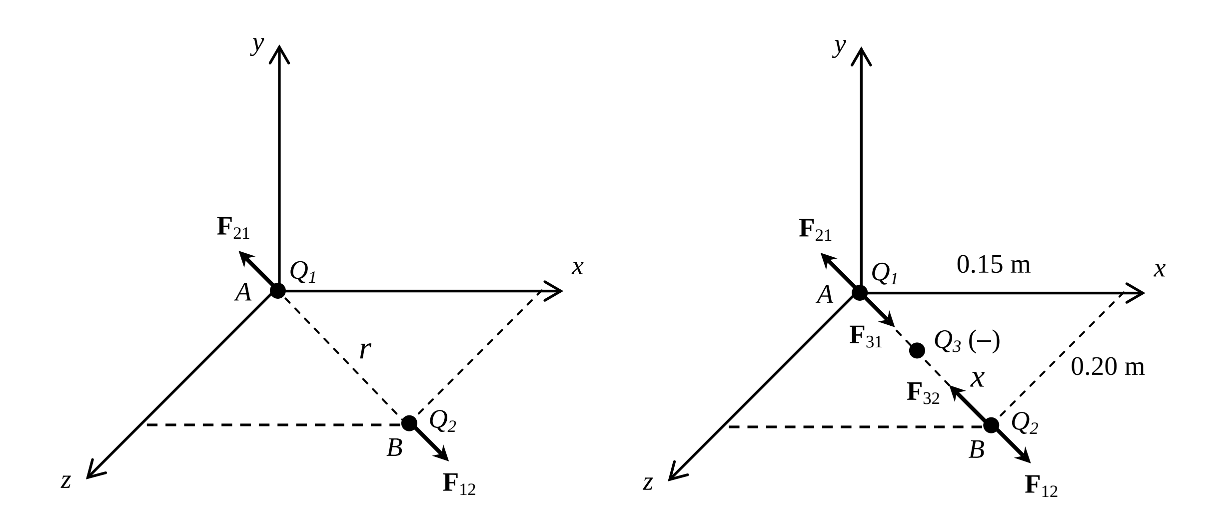
$$\frac{T\,\text{sen}\,\theta}{T\cos\,\theta} = \frac{Fe}{mg}$$

$$\tan\theta = \frac{Kq^2}{r^2 mg}$$

$$q^2 = \frac{r^2 mg\tan\theta}{K} = \frac{(0.02)^2\,0.045\cdot 10\cdot 0.025}{9\times 10^9} = 0.5\times 10^{-15}\ \text{C}^2$$

$$q = 2.236\times 10^{-9}\ \text{C}$$

7. Dos cargas puntuales de 4×10^{-9} y 20×10^{-9} C se hallan localizadas en los puntos de coordenadas *A* (0, 0, 0) y *B* (15, 0, 20) cm, respectivamente. Determine:
a) la posición en la que se debe colocar una tercera carga para que todo el sistema se mantenga en reposo.
b) la magnitud y signo de la tercera carga.



a) Como las cargas Q_1 y Q_2 son del mismo signo, entre ellas hay una fuerza de repulsión. Para que el sistema permanezca en reposo se deberá colocar la tercera carga, de signo contrario Q_3 (–), entre las dos primeras, a fin de generar fuerzas de atracción que se anulen. Para que Q_3 esté en equilibrio:

$$\Sigma \mathbf{F} = 0$$

$$F_{31} = F_{32}$$

$$\frac{KQ_1Q_3}{(r-x)^2} = \frac{KQ_2Q_3}{x^2}$$

$$\frac{4\times10^{-9}}{(0.25-x)^2} = \frac{20\times10^{-9}}{x^2}$$

$$x^2 = 5(0.25 - x^2)$$

$$x = 0.173 \text{ m}$$

b) Debido a que todo el sistema debe estar en equilibrio, Q_2, por ejemplo, también debe estarlo, por lo tanto el sumatorio de las fuerzas que actúan sobre Q_2 debe ser cero. La fuerza repulsiva entre Q_1 y Q_2 ($\mathbf{F}_{12}$) se equilibra con la fuerza atractiva entre Q_3 (–) y Q_2 ($\mathbf{F}_{32}$):

$$\Sigma \mathbf{F} = 0$$

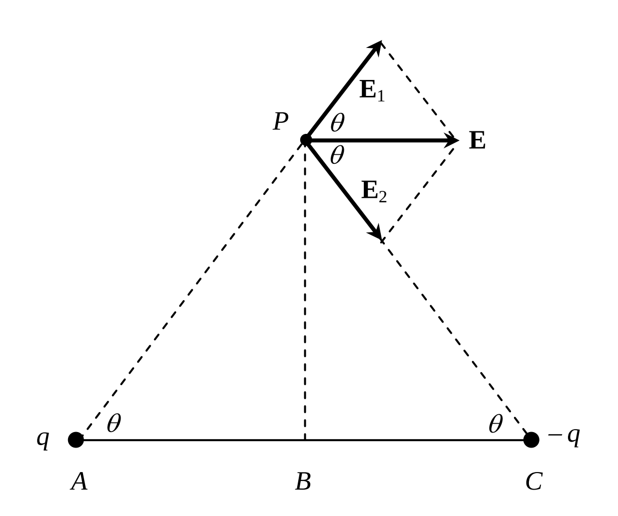
$$F_{12} = F_{32}$$

$$\frac{KQ_1Q_2}{r^2} = \frac{KQ_2Q_3}{x^2}$$

$Q_3 = (x^2/r^2)\ Q_1$

$Q_3 = -\ 1.91 \times 10^{-9}$ C

8. Cargas puntuales de 2×10^{-7} C y $-\ 2\times10^{-7}$ C están separadas 6 m. El punto P se encuentra a 5 m de cada carga. Encuentre el campo eléctrico que dichas cargas producen en P.



$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$

$$E_1 = \frac{Kq}{r^2} = \frac{9\times10^9 \cdot 2\times10^{-7}}{5^2} = 72\,\text{N/C}$$

$E_1 = E_2$

$AB = 3$ m

$BP = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ m

$\mathbf{E}_1 = 72$ N/C (cos $\theta\,\mathbf{i}$ + sen $\theta\,\mathbf{j}$)

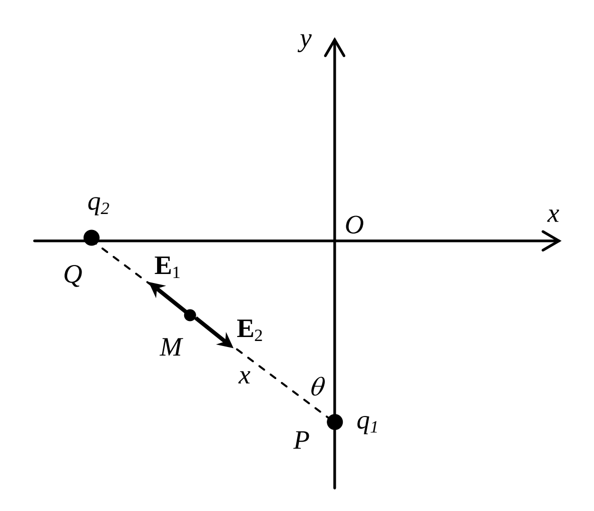
$\mathbf{E}_1 = 72$ N/C (3/5 **i** + 4/5 **j**) = 43.2 **i** + 57.6 **j** **N/C**

$\mathbf{E}_2 = 72$ N/C (3/5 **i** – 4/5 **j**) = 43.2 **i** – 57.6 **j** **N/C**

E = 43.2 **i** + 57.6 **j** + 43.2 **i** – 57.6 **j** **N/C**

E = 86.4 **i** **N/C**

9. Una carga puntual $q_1 = -2\times10^{-6}$ C está colocada en el punto *P* (0, −3) y otra carga puntual $q_2 = -2\times10^{-7}$ C está en el punto Q (–4, 0) m. Determine la ubicación del punto *M*, en el cual los campos eléctricos producidos por ambas cargas se anulan.



$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = 0$

$E_1 = E_2$

$$\frac{Kq_1}{x^2} = \frac{Kq_2}{(5-x)^2}$$

$$\frac{9\times10^9 \cdot 2\times10^{-6}}{x^2} = \frac{9\times10^9 \cdot 3\times10^{-6}}{(5-x)^2}$$

$2(5-x)^2 = 3\,x^2$

$x = 2.25$ m

$\mathbf{r}_M = \mathbf{r}_\mathrm{P} + \mathbf{PM}$

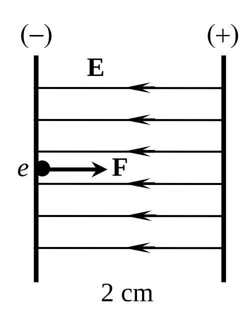
$\mathbf{r}_M = (0\,\mathbf{i} - 3\,\mathbf{j})\text{ m} + 2.25\text{ m }(-\text{sen }\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j})$

$\mathbf{r}_M = (0\,\mathbf{i} - 3\,\mathbf{j})\text{ m} + 2.25\text{ m }(-4/5\,\mathbf{i} + 3/5\,\mathbf{j})$

$\mathbf{r}_M = (0\,\mathbf{i} - 3\,\mathbf{j})\text{ m} + (-1.80\,\mathbf{i} + 1.35\,\mathbf{j})\text{ m}$

$\mathbf{r}_M = -1.80\,\mathbf{i} - 1.65\,\mathbf{j}\text{ m}$

10. Entre dos láminas planas y paralelas, que tienen cargas de igual magnitud y de signo contrario, hay un campo eléctrico uniforme. Se suelta un electrón en la lámina cargada negativamente, que llega a la lámina opuesta, situada a 2 cm, luego de 1.5×10^{-8} s. Determine: a) la intensidad del campo eléctrico, b) la rapidez del electrón cuando llega.



a) En un campo eléctrico uniforme, la intensidad del campo es constante y la fuerza que experimenta una carga de prueba, en su interior, también es constante. En consecuencia, la aceleración que actúa sobre el electrón es constante.

$$\Delta x = 1/2a\Delta t^2$$

$$0.02 = 1/2a(1.5\times 10^{-8})^2$$

$$a = 1.78\times 10^{14} \text{ m/s}^2$$

$$F = ma = 9.1\times 10^{-31}\, 1.78\times 10^{14} = 16.18\times 10^{-17} \text{ N}$$

$$E = \frac{F}{q} = \frac{16.18\times10^{-7}}{1.6\times10^{-19}} = 1011 \text{ N/C}$$

$$\mathbf{E} = 1011\ \mathbf{i} \text{ N/C}$$

b) De acuerdo con la cinemática:

$$v = a\Delta t$$

$$v = 1.78\times 10^{14} \cdot 1.5\times 10^{-8}$$

$$v = 2.67\times 10^{6} \text{ m/s.}$$

CAPÍTULO 5

TRABAJO Y ENERGÍA

CAPÍTULO 5

TRABAJO Y ENERGÍA

5.1 INTRODUCCIÓN

Hasta el momento se ha analizado el movimiento de los cuerpos, y se han resuelto problemas en los cuales se considera que la aceleración que actúa sobre el cuerpo permanece constante. Luego se pasó a estudiar las fuerzas que actúan sobre los cuerpos y el efecto que producen, es decir, la aceleración. Este análisis de la relación fuerza - aceleración posibilitó la solución de una mayor variedad de problemas. Sin embargo, cuando las fuerzas que actúan sobre el sistema que se analiza, resultan muy difíciles de ser definidas, o cuando el sistema está formado por muchas partículas, los conceptos de fuerza y aceleración no son tan fáciles de aplicar para resolver problemas relacionados con estas dos situaciones. Por esta razón se hace necesaria la introducción de otros conceptos que facilitan y simplifican la solución de estos problemas. Tal es el caso del *trabajo* y de la *energía*.

La comprensión y aplicación de los conceptos de trabajo y energía no solo que facilitan la solución de los problemas arriba mencionados, sino que permiten formular principios de carácter más general, que constituyen una nueva y poderosa herramienta para la solución de otros problemas, inclusive fuera del ámbito de la mecánica. Estos principios se conocen como los principios de conservación.

5.2 TRABAJO Y ENERGÍA CINÉTICA

Trabajo de una fuerza constante

Para introducir el concepto de energía cinética, se analizará un primer sistema, bastante simple, que consta de una partícula de masa m que se mueve en línea recta por una superficie horizontal lisa, sometida a la acción de una fuerza constante y paralela al desplazamiento, como se indica en la Fig. 5–1. Suponga que al $t = 0$ la rapidez de la partícula es v_{x0} y que, luego de desplazarse un Δx, al tiempo t su rapidez es v_{xf}.

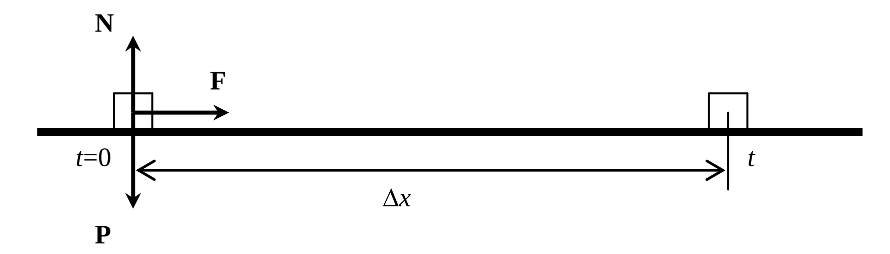


Figura 5–1

En el eje vertical no hay aceleración, la normal es igual al peso, entonces la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo es **F**. Aplicando la segunda Ley de Newton se tiene:

$$F = m\, a_x. \qquad (5\text{–}1)$$

Como **F** es constante, a_x es constante y se puede usar la ecuación:

$$a_x = v_{xf}^2 - v_{x0}^2 / 2\, \Delta x. \qquad (5\text{–}2)$$

Combinando la Ec. 5–1 y la Ec. 5–2 tenemos:

$$F = m\, (v_{xf}^2 - v_{x0}^2) / \; 2\, \Delta x \quad \text{ó}$$

$$F\, \Delta x = ½\, m\, v_{xf}^2 - ½\, m\, v_{x0}^2 \qquad (5\text{–}3)$$

A la cantidad $½\, mv^2$, que aparece en la Ec. 5–3, se denomina con el nombre genérico de energía y como en este caso depende de la velocidad se la conoce como *energía cinética* (E_c), por lo tanto la expresión anterior indica la energía cinética de una partícula de masa m en el instante en el cual su velocidad es **v**.

Entonces la Ec. 5–3 queda:

$$F\Delta x = E_{cf} - E_{c0} \quad \text{ó}$$

$$F\Delta x = \Delta E_c. \qquad (5\text{–}4)$$

Por lo tanto para que exista cambio en la energía cinética es necesario que exista la cantidad $F\Delta x$, la cual se conoce como el trabajo mecánico realizado sobre la partícula por la fuerza y se representa con el símbolo T, por lo que la Ec. 5–4 queda:

$$T_F = \Delta E_{c}. \qquad (5\text{–}5)$$

Aunque estas dos cantidades están relacionadas entre sí, son muy diferentes en su naturaleza. Así por ejemplo, el trabajo mecánico no depende del cuerpo sino del agente externo, es una cantidad que se acumula con el tiempo y no es una cantidad instantánea, ya que para que haya trabajo es necesario que exista desplazamiento y éste requiere un intervalo de tiempo; en cambio, la energía cinética no depende del agente externo sino que es una propiedad del cuerpo y de su movimiento; no se acumula con el tiempo y es una cantidad instantánea, puesto que depende de la velocidad que también lo es.

Como en el caso que se está analizando la fuerza neta es **F**, entonces el trabajo realizado por la fuerza **F** viene a ser el trabajo neto (T_n), por lo tanto:

$$T_n = \Delta E_c \qquad (5\text{–}6)$$

De esta manera, se ha llegado a la forma más elemental de un principio muy valioso, el trabajo neto realizado sobre un cuerpo puede ser cuantificado por el cambio que experimenta la energía cinética del mismo.

El trabajo viene dado por el producto de la fuerza por el desplazamiento, si la unidad de la fuerza es el Newton (N) y el desplazamiento está en metros (m) el trabajo viene dado en N.m, unidad que se conoce con el nombre de Joule o Julio (J).

El cambio en la energía cinética viene dado por el trabajo mecánico, entonces la energía cinética también se mide en Joule. Se ha comprobado que tanto el trabajo como la energía cinética no cumplen con las reglas de la suma de los desplazamientos, sino con las reglas de la suma escalar y por ello son cantidades físicas escalares.

Trabajo de una fuerza variable en magnitud

Con el propósito de generalizar el principio mencionado antes, considere ahora un sistema más complicado: una partícula que se mueve en línea recta por una superficie horizontal lisa, sometida a la acción de una fuerza paralela al desplazamiento, pero que varía en magnitud, como se indica en la Fig. 5–2. Al $t = 0$, la partícula tiene una rapidez v_{x0} y después del desplazamiento Δx al tiempo t tiene una rapidez v_{xt}.

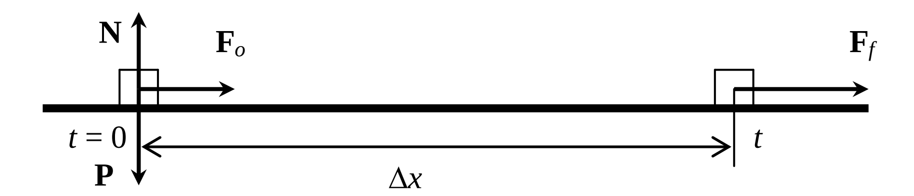


Figura 5–2

Debido a que en el eje vertical no hay aceleración, la normal es igual al peso, entonces la fuerza neta que actúa sobre la partícula es **F**; como esta fuerza es variable no se puede encontrar el trabajo realizado por ella con la Ec. 5–4, puesto que fue desarrollada para una fuerza constante.

Una forma de cuantificar el trabajo, en este caso, es descomponer el desplazamiento Δx en una gran cantidad de desplazamientos sumamente pequeños, de manera que cada uno de ellos tienda a cero (desplazamientos infinitesimales). De esta forma se puede considerar (sin cometer un error significativo) que en cada uno de esos pequeños desplazamientos la fuerza permanece aproximadamente constante, lo que permite aplicar la Ec. 5–4.

Para ilustrar claramente este proceso suponga que el desplazamiento se divide en los 9 intervalos que se indican en la Fig. 5–3.

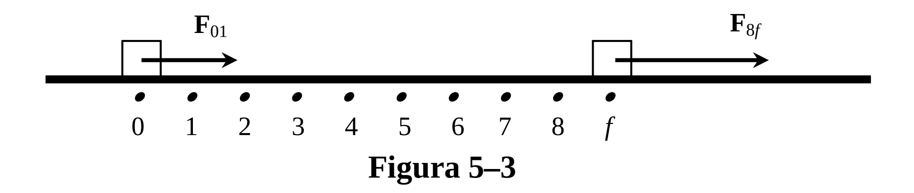


Figura 5–3

Si se aplica la Ec. 5–4 a cada uno de los intervalos se tiene:

$$F_{01}\ \Delta x_{01} = E_{c1} - E_{c0}$$

$$F_{12}\ \Delta x_{12} = E_{c2} - E_{c1}$$

$$F_{23}\ \Delta x_{23} = Ec_{3} - E_{c2}$$

____

____

____

____

$$F_{8f}\ \Delta x = E_{cf} - E_{c8}$$

____

$$T_F = E_{cf} - E_{c0} \quad \text{ó}$$

$$T_F = \Delta E_c$$

Sumando miembro a miembro estas relaciones tenemos, al lado izquierdo, el trabajo realizado por la fuerza variable en todo el desplazamiento y, al lado derecho, la variación de la energía cinética también para todo el desplazamiento, puesto que todas las otras energías cinéticas intermedias se anulan entre sí.

Como **F** es la fuerza neta, entonces el trabajo de la fuerza **F** es el trabajo neto, por lo que:

$$T_n = \Delta E_c$$

Por lo tanto, la Ec. 5–6 también se cumple para esta nueva situación física, o sea cuando actúa una fuerza variable, la única diferencia está en la forma de calcular el trabajo, ya que si la fuerza es constante el trabajo es igual a $F\ \Delta x$ y si es variable el trabajo es igual al $\Sigma F\ \Delta x$.

Este último trabajo viene a ser el resultado de la suma de un infinito número de trabajos infinitesimales. Este tipo de sumatorio se puede cuantificar más fácilmente con ayuda del cálculo integral, puesto que dicho sumatorio corresponde a una integral definida, se representa de la siguiente forma:

$$\int_{x_0}^{x_f} F\ dx.$$

Trabajo de una fuerza que no es paralela al desplazamiento

Para generalizar la Ec. 5–6, considere ahora una partícula que se mueve por una trayectoria recta sobre una superficie horizontal lisa, sometida a la acción de una fuerza constante, pero que ya no es paralela al desplazamiento, sino que forma un ángulo θ, cualquiera, con ella, como se indica en la Fig. 5–4.

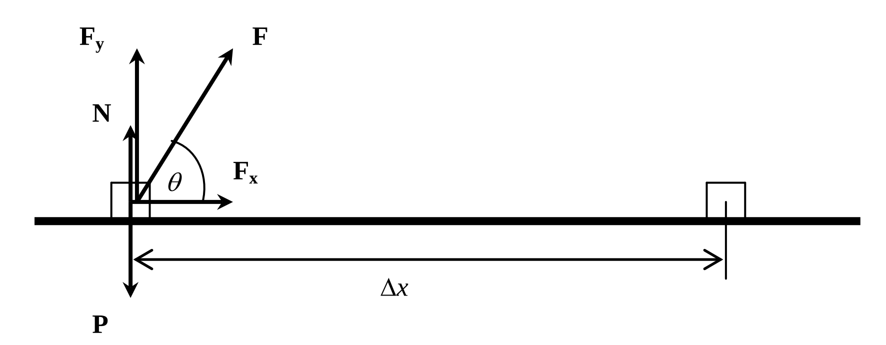


Figura 5–4

En vista de que en el eje vertical no hay aceleración, la fuerza neta que actúa sobre la partícula es F_x, que a su vez es la única que realiza trabajo, puesto que es la responsable de producir el cambio en la energía cinética.

Aplicando la segunda ley de Newton se tiene:

$$F_x = m\ a_x$$

$$F \cos \theta = m\ (v_{xf}^{\ 2} - v_{x0}^{\ 2}) \ / \ 2\ \Delta x$$

$F\ \Delta x \cos \theta \ = \ E_{cf} \ - E_{c0}$, con lo cual podemos escribir:

$$F\ \Delta x \cos \theta \ = \ \Delta E_c \qquad (5\text{–}7)$$

Según lo visto anteriormente, la cantidad física que produce el cambio en la energía cinética representa el trabajo realizado por el agente externo, por lo tanto en este caso la expresión $F\,\Delta x \cos\,\theta$ corresponde al trabajo realizado por la fuerza **F**; y como F_x es la fuerza neta entonces la Ec. 5–7 queda:

$T_n = \Delta E_c$, que es la misma que se obtuvo en los casos anteriores.

Haciendo una síntesis hasta el momento se puede decir que la Ec. 5–6 se cumple para todos los sistemas analizados y que la única diferencia está en la forma de calcular el trabajo, como se ilustra en el siguiente esquema:

$T_F = \Delta E_c$

- → Si $F =$ cte y paralela al desplazamiento $\Rightarrow T_F = F\,\Delta x$
- → Si $F \neq$ cte y paralela al desplazamiento $\Rightarrow T_F = \Sigma\, F\,\Delta x = \int_{x_0}^{x} F\,dx$
- → Si $F =$ cte y no es paralela al desplazamiento $\Rightarrow T_F = F\,\Delta x \cos\,\theta$

Si analizamos un poco más la relación $F\,\Delta x \cos\,\theta$ tenemos las siguientes posibilidades:

Si $0 \leq \theta \leq 90°$ entonces $\cos\,\theta$ es + y el trabajo es +

Si $\theta = 90°$ entonces $\cos\,\theta = 0$ y el trabajo es igual a 0

Si $90° \leq \theta \leq 180°$ entonces $\cos\,\theta$ es – y el trabajo es –

Por lo tanto, según el ángulo que forma la fuerza con el desplazamiento, el trabajo puede ser positivo, cero ó negativo. Los trabajos positivos se conocen con el nombre de trabajos activos, porque son realizados por fuerzas que tienen al menos una componente que está en la misma dirección del desplazamiento. A los trabajos negativos se les conoce con el nombre de trabajos resistivos, porque son realizados por fuerzas que al menos tienen una componente que está en dirección contraria al desplazamiento.

En el caso más general, sobre un mismo cuerpo pueden actuar simultáneamente varias fuerzas, unas en la misma dirección y otras en dirección contraria al desplazamiento, las cuales a su vez realizan trabajos activos y resistivos. Si sumamos todos estos trabajos obtenemos el trabajo neto realizado sobre el cuerpo, es decir el trabajo realizado por la fuerza neta, o sea:

$$\Sigma\, T_a + \Sigma\, T_r = T_n \qquad (5–8)$$

Analizando la última relación del trabajo $T_F = F\,\Delta x \cos\,\theta$, se ve que tanto la fuerza como el desplazamiento son cantidades vectoriales y que su producto da como resultado una cantidad escalar, por lo tanto se puede definir el trabajo de una fuerza como el producto escalar de la fuerza por el desplazamiento, esto es:

$$T_F = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{x} = F\,\Delta x \cos\,\theta \qquad (5–9)$$

El trabajo como el área bajo la curva *F cos θ* contra *x*

Graficando F cos θ contra x, para una fuerza constante, se obtiene una recta horizontal, como se indica en la Fig. 5–5. El área encerrada entre la curva de la función F cos θ, el eje x y las rectas $x = 0$ y $x = x$ tiene un valor: $\Delta x \quad F \cos \theta \; = F \; \Delta x \cos \theta$ que corresponde precisamente al trabajo realizado por la fuerza **F**.

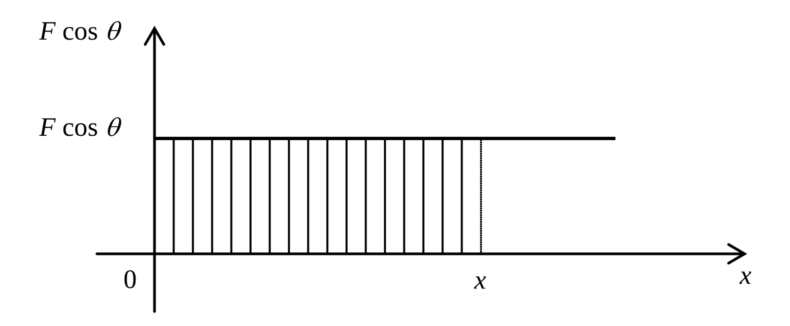


Figura 5–5

Por lo tanto otra forma, relativamente sencilla, de cuantificar el trabajo realizado por una fuerza es calculando el área que se encuentra entre la curva de la función F cos θ contra x, el eje x y las rectas correspondientes.

Es indudable que esta área es fácil de encontrar cuando se tienen funciones lineales, ya que dicha área corresponde al área de figuras geométricas regulares, en caso contrario, para la determinación del área es necesario recurrir a la ayuda del cálculo integral, que está fuera del alcance del presente texto.

Trabajo de una fuerza variable en módulo y dirección

Esta situación podría darse cuando un cuerpo se mueva por una superficie horizontal lisa y describa una trayectoria curva, como la que se indica en la Fig. 5–6. Para que el análisis sea más sencillo suponga que la fuerza siempre forma un ángulo θ, con la dirección del movimiento.

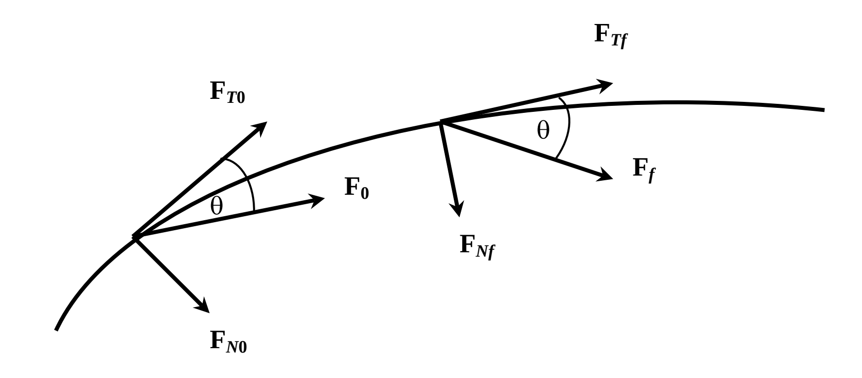


Figura 5–6

Como en la dirección perpendicular a la superficie no hay aceleración; la magnitud de la normal es igual a la del peso y la $\mathbf{F}_n$ es la fuerza variable **F.**

Al descomponer la fuerza en sus componentes tangencial y normal, la componente normal nunca realiza trabajo mecánico, porque siempre es perpendicular al movimiento, por lo tanto el trabajo realizado por la fuerza **F** está dado solo por el trabajo de su componente tangencial.

Como esta componente es variable al menos en dirección, para cuantificar su trabajo se aplica un método similar al que se utilizó antes, para calcular el trabajo de una fuerza variable en módulo, esto es, se divide el arco recorrido en pequeños arcos infinitesimales que tiendan a cero, de tal manera que se pueda igualar cada longitud de arco infinitesimal (Δs) al módulo de su respectivo desplazamiento (Δx), para considerar que en ese pequeño desplazamiento la fuerza permanece aproximadamente constante y se pueda aplicar, otra vez, la Ec. 5–4 a cada uno de esos desplazamientos, de la siguiente forma:

$$F_{t01}\,\Delta s_{01}\cos 0° = E_{c1} - E_{c0} \qquad \text{donde:} \quad \Delta s_{01} = \Delta x_{01}$$

$$F_{t12}\,\Delta s_{12}\cos 0° = E_{c2} - E_{c1}$$

$$F_{t23}\,\Delta s_{23}\cos 0° = E_{c3} - E_{c2}$$

____

____

____

____

$$F_{t\,(n-1)\,n}\,\Delta s_{(n-1)\,n}\cos 0° = E_{cf} - E_{c(n-1)}.$$

Sumando miembro a miembro todas estas ecuaciones queda:

$$T_{F01} + T_{F12} + \text{---------------} = \Delta E_c \quad \text{o sea:}$$

$$\Sigma\, T = \Delta E_c$$

Pero el $\Sigma\, T$ es el trabajo neto, por tanto tenemos que:

$$T_n = \Delta E_c,$$

que es exactamente igual a la Ec. 5–6.

En el caso particular de que la fuerza tangencial sea constante en módulo, el sumatorio anterior queda:

$$\mathbf{F_t}\,(\Delta s_{01} + \Delta s_{12} + \ldots\ldots\ldots\ldots..)\cos 0° = \Delta E_{c,}$$

Pero la suma que está dentro del paréntesis es la longitud total del arco recorrido, por lo que queda:

$$F_t\,\Delta s\cos 0° = \Delta E_c,$$

Lo que significa que, en general, el trabajo realizado por una fuerza tangencial constante en módulo está dado por la siguiente expresión:

$$T = F_t\ \Delta s \cos\theta \qquad (5\text{–}10)$$

Generalizando todo lo visto hasta ahora se puede decir que siempre que un cuerpo se mueva por una superficie horizontal, lisa, independientemente de la trayectoria que describa o de las características de las fuerzas que actúen sobre él, el trabajo neto siempre es igual a la variación de la energía cinética. La única diferencia está en la forma de calcular el trabajo, como se ha demostrado en los diferentes sistemas analizados anteriormente.

Potencia

Cuando se relaciona el trabajo realizado por una fuerza cualquiera con el intervalo de tiempo durante el cual se realizó dicho trabajo, se obtiene otra cantidad física, que indica la rapidez con la que se realiza un trabajo; esta cantidad se conoce con el nombre de Potencia (*P)*; por lo tanto, la potencia viene dada por la siguiente expresión:

$$P = T / \Delta t \qquad (5\text{–}11)$$

Si el trabajo se mide en Joules y el Δt en segundos, la potencia viene dada en J/s, unidad que se conoce con el nombre de vatio.

Esta nueva cantidad física es muy importante ya que en la práctica no interesa tanto conocer el trabajo que es capaz de realizar cualquier agente externo, sino la rapidez con la que lo hace.

5.3 TRABAJO Y ENERGÍA POTENCIAL

En la sección anterior se consideró el movimiento de una partícula sobre una superficie horizontal, lisa. Considere ahora primeramente una partícula de masa m colocada sobre el tablero de una mesa que se encuentra a una altura h_0 del piso como se indica en la Fig. 5–7(a) donde la Tierra genera una fuerza **P** (peso) y el tablero de la mesa una fuerza **N** (normal), que actúan sobre la partícula. Como no existe aceleración se tiene que $N = P$.

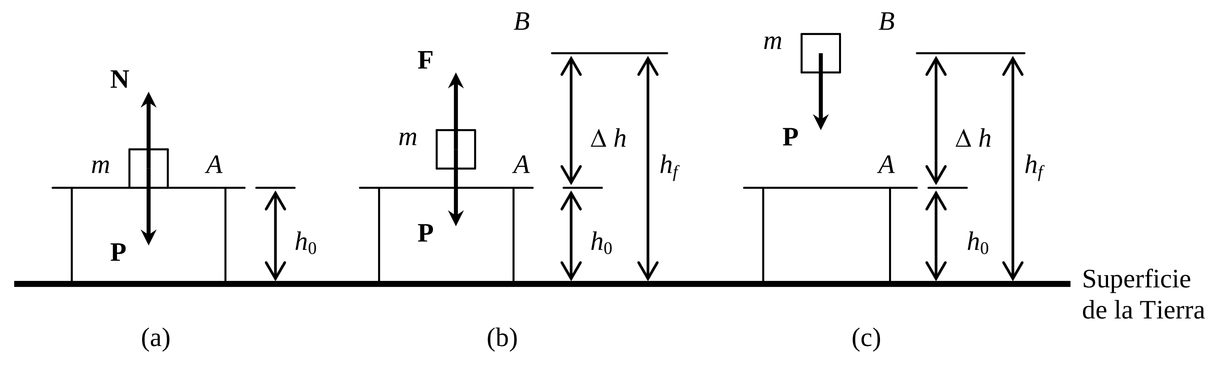


Figura 5–7

Si la partícula de masa m es subida con una velocidad **v** constante, desde la posición A hasta la posición B, por medio de una fuerza constante **F**, de magnitud igual a la del peso **P,** cuyo valor es $P = mg$, el desplazamiento de la partícula es $\Delta h = h_f - h_0$, como se indica en la Fig. 5–7 (b) y la fuerza neta sobre el bloque es cero, h_f y h_0 son, respectivamente, las alturas verticales del punto final B y del punto inicial A, con respecto a cualquier nivel de referencia (por ejemplo la superficie de la Tierra).

Entonces:

$$F - P = 0$$

Si se multiplica por Δh se tiene:

$$F \Delta h - P \Delta h = 0 \text{ entonces:}$$

$$T_F - T_P = 0$$

Donde $T = F \Delta h$ es el trabajo realizado por la fuerza **F**, y $T_P = - P \Delta h = - mg \Delta h$ el trabajo realizado por el peso. En este caso, como la fuerza neta es igual a cero no hay incremento en la energía cinética de la partícula, ya que el peso realiza una cantidad de trabajo igual pero negativo.

Entonces:

$$T_F - mg \Delta h = 0$$

$$T_F = mg \Delta h = mg (h_f - h_0) = mg h_f - mg h_0$$

La cantidad mgh se define como otra clase de energía que se denomina *energía potencial gravitacional* (E_{pg}), h es la altura (posición) de m, con respecto a un nivel arbitrario de referencia.

$$T_F = E_{pgf} - E_{pg0}, \text{ es decir}$$

$$T_F = \Delta E_{pg} \qquad (5\text{–}12)$$

En otras palabras, podemos decir que mientras la partícula cambia verticalmente de posición de A hasta B, con velocidad constante, la fuerza F realiza un trabajo sobre la partícula, que produce un incremento en la energía potencial gravitacional de la misma.

Además, como:

$$T_P = - mg \Delta h = - mg h_f + mg h_0 = -(E_{pgf} - E_{pg0})$$

queda finalmente que:

$$T_P = - \Delta E_{pg} \qquad (5\text{–}13)$$

Lo que significa que el trabajo realizado por el peso siempre produce un cambio en la energía potencial gravitacional; así por ejemplo, si el peso realiza un trabajo positivo la energía potencial gravitacional disminuye y viceversa.

Considere, ahora, una partícula de masa m que sube por un plano inclinado, liso, con velocidad constante por acción de la fuerza constante **F**, paralela al plano, como se indica en la Fig. 5–8 (a).

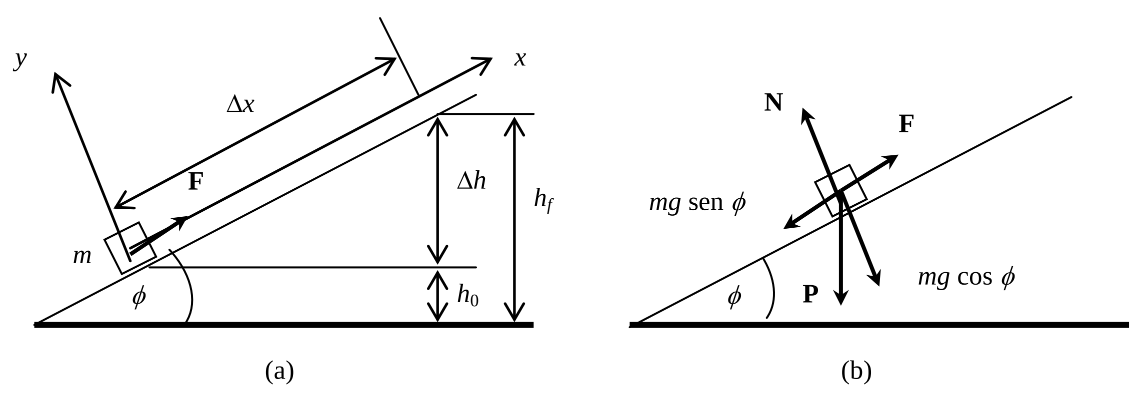


Figura 5–8

Analizando el diagrama de fuerzas de la Fig. 5–8 (b) y con ayuda de la primera ley de Newton, en la dirección perpendicular al plano se tiene que $N = mg\cos\phi$ puesto que no hay aceleración en esa dirección; y como la partícula sube con velocidad constante no existe aceleración en la dirección paralela al plano, entonces $F - mg\,\text{sen}\,\phi = 0$. Como $\text{sen}\,\phi = \Delta h / \Delta x$, se tiene que $F - mg\,\Delta h / \Delta x = 0$, que se arregla y queda $F\,\Delta x - mg\,\Delta h = 0$, que es exactamente igual a la respuesta encontrada para el movimiento de la partícula de masa m desde A hasta B de la Fig. 5–7 (a); en consecuencia, se puede asegurar que el cambio en la energía potencial no depende de la trayectoria seguida, sino de las posiciones inicial y final.

Para generalizar, considere una partícula de masa m que sube con aceleración, por un plano inclinado, liso, por acción de la fuerza constante **F** paralela al plano, como se indica en la Fig. 5–9 (a).

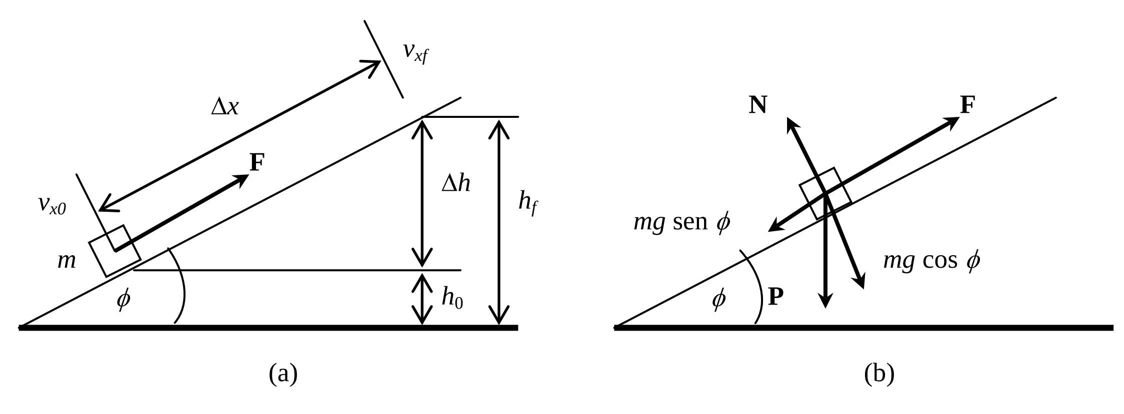


Figura 5–9

Analizando el diagrama de fuerzas de la Fig. 5–9 (b) y, con ayuda de la primera ley de Newton, en la dirección perpendicular al plano se tiene que $N = mg \cos \theta$ puesto que no hay aceleración en esa dirección, y como el cuerpo sube con aceleración **a** paralela al plano, por la segunda ley de Newton se tiene que:

$$F - mg \text{ sen } \phi = m\,a$$

pero sen $\phi = \Delta h / \Delta x$, entonces:

$$F - mg\,\Delta h / \Delta x = m\,a;$$

que al sacar denominador común y multiplicar queda:

$$F\,\Delta x - mg\,\Delta h = m\,a\,\Delta x,$$

Debido a que las fuerzas que actúan sobre la partícula son constantes, la aceleración a también lo es, por lo que podemos reemplazarla por la expresión:

$$a = (v_{xf}^{\,2} - v_{x0}^{\,2}) / 2\,\Delta x$$

y entonces se tiene que:

$$F\,\Delta x - mg\,\Delta h = \Delta E_c$$

$$F\,\Delta x = mg\,\Delta h + \Delta E_c$$

$$T_F = \Delta E_{pg} + \Delta E_c \qquad (5\text{–}14)$$

Lo que significa que en estas condiciones, el trabajo realizado por la fuerza puede producir cambios en las energías cinética y potencial gravitacional de la partícula.

De las tres situaciones analizadas anteriormente, se puede concluir que la energía potencial gravitacional de una partícula está dada por la expresión mgh si se considera que la partícula se mueve por un campo gravitacional uniforme, ya que g no cambia con la altura, porque solamente se consideran aquellas situaciones en las cuales h es muy pequeña, comparada con el radio de la Tierra. Debe quedar claro entonces que esta relación no se puede aplicar para alturas en las cuales la gravedad tiene una variación significativa con las mismas.

Debido a que h representa la altura de la partícula con respecto a un nivel de referencia escogido arbitrariamente, h puede ser positiva, negativa o cero, lo que significa a su vez que la energía potencial puede ser también positiva, negativa o cero, a diferencia de la energía cinética que siempre tiene valores positivos o cero.

También es importante indicar que la energía potencial gravitacional no es una propiedad exclusiva de la partícula sino del sistema partícula-Tierra, por lo que se debe cuidar al hablar de E_{pg} de un sistema y no de una partícula.

Finalmente, si se considera la Ec. (5–14) se puede escribir:

$$T_F - \Delta E_{pg} = \Delta E_c$$

Pero como se vio anteriormente: $-\Delta E_{pg} = T_P$, entonces:

$$T_F + T_P = \Delta E_c$$

En vista de que las únicas fuerzas que realizan trabajo son **F** y **P**, entonces la suma de los trabajos realizados por estas fuerzas es el trabajo neto, por lo que se puede concluir que:

$$T_n = \Delta E_c$$

Lo que quiere decir que la relación trabajo neto–variación de energía cinética, es una relación de carácter general, aplicable a cualquier sistema acelerado.

Trabajo de la fuerza elástica y energía potencial elástica

Las fuerzas elásticas son aquellas que aparecen en sistemas deformables como son, por ejemplo, los resortes. Suponga entonces que se tiene una partícula de masa m, unida al extremo de un resorte de masa despreciable y longitud natural l_0, lo que quiere decir que el resorte no está ni estirado ni comprimido, como se indica en la Fig. 5–10 (a).

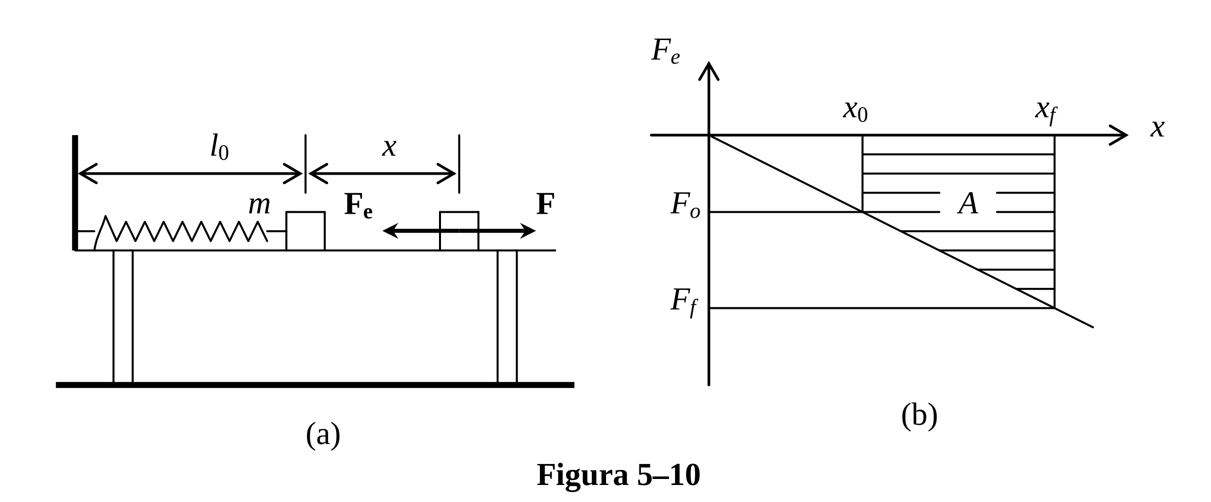


Figura 5–10

Al aplicar una fuerza **F** al sistema masa-resorte, para estirarle una distancia x a partir de su longitud natural, se observa que el resorte ejerce, a su vez, una fuerza en dirección contraria sobre la masa, que se denomina fuerza recuperadora elástica F_e y que depende de su deformación o elongación, ya que para provocar una mayor deformación es necesario aplicar cada vez una fuerza más grande.

La relación entre la fuerza recuperadora elástica F_e y la deformación del resorte x fue investigada por Hooke, quien en forma experimental determinó que:

$$F_e = -k\,x, \qquad (5\text{–}15)$$

donde k es una constante que depende de las propiedades físicas del resorte y que se denomina constante elástica. El signo negativo indica que la fuerza recuperadora elástica siempre está en dirección contraria a la deformación.

Al deformar el sistema masa-resorte desde una posición inicial x_0 hasta una posición final x_f, la fuerza recuperadora elástica realiza un trabajo que se puede cuantificar con el cálculo del área que se encuentra entre la curva F_e contra x, el eje x y las rectas $x = x_0$ y $x = x_f$, como se indica en la Fig. 5–10 (b), o sea

$T_{Fe} = ½\, F_f .\ x_f\ – ½\, F_0\ x_0$, como $F_e = –\, k\, x$, entonces:

$T_{Fe} = –\ ½\, k\, x_f\, .\, x_f\ + ½\, k\, x_0\, .\, x_0$

$T_{Fe} = –\ (½\, k\, x_f^{\ 2} – ½\, k\, x_0^{\ 2})$

La cantidad $½\, k\, x^2$ es otro tipo de energía potencial conocida con el nombre de *energía potencial elástica* de una partícula, unida a un resorte de constante elástica k, por lo tanto:

$$T_{Fe}\ = –\ (E_{pef}\ – E_{peo})$$

$$T_{Fe} = –\ \Delta\, E_{pe} \qquad (5–16)$$

Lo que quiere decir que, el trabajo realizado por la fuerza elástica siempre está asociado a un cambio en la energía potencial elástica, así por ejemplo, si la fuerza elástica realiza un trabajo positivo, la energía potencial elástica disminuye y viceversa.

Energía mecánica

De lo que se ha visto hasta el momento, un sistema masa – resorte – tierra puede tener simultáneamente energía cinética, energía potencial gravitacional y energía potencial elástica. A la suma de estas tres formas de energía se denomina energía mecánica (E_M), o sea:

$$E_M = E_c + E_{pg} + E_{pe} \qquad (5–17)$$

5.4 FUERZAS CONSERVATIVAS Y NO CONSERVATIVAS

Fuerzas conservativas

Debido a que en un sistema masa-resorte pueden existir las energías cinética, potencial gravitacional y potencial elástica es posible que se produzca cualquier interconversión entre estas tres formas de energía, como se ilustra en la Fig. 5–11.

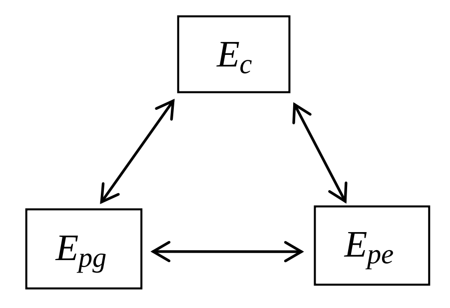


Figura 5–11

Un ejemplo de estas interconversiones se puede analizar con el cuerpo de la Fig. 5–12, que se encuentra inicialmente en reposo, sobre el resorte comprimido.



Figura 5–12

Al soltar el resorte, el cuerpo se mueve hacia arriba hasta alcanzar cierta altura, con respecto al nivel de referencia que se indica. Durante el movimiento vertical, la energía potencial elástica que tenía el sistema cuando el resorte estaba comprimido se convierte en energía cinética y en energía potencial gravitacional.

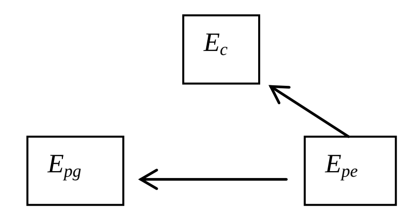


Figura 5–13

Si el intervalo de análisis es entre el instante en que el cuerpo vuelve a ponerse en contacto con el resorte y el instante en que se detiene, luego de comprimir al resorte nuevamente, la energía cinética con que llega el cuerpo, mas la energía potencial gravitacional se convierten en energía potencial elástica, como se ilustra en la Fig. 5–14.

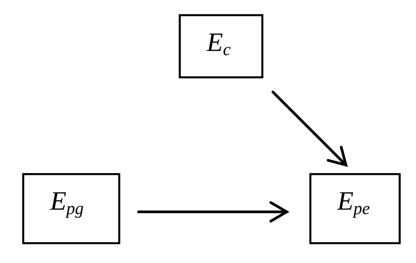


Figura 5–14

En cualquiera de los casos de interconversión, la energía mecánica del sistema permanece constante, es decir, *se conserva*, pues no hay flujo de energía desde o hacia otro sistema exterior; en consecuencia, a las fuerzas que intervienen en estas interconversiones se les llama *fuerzas conservativas*; entre ellas se puede mencionar a las fuerzas gravitacional, elástica y eléctrica.

Cuando una fuerza es conservativa, el trabajo realizado por ella cumple con las siguientes características:

a) es independiente de la trayectoria,
b) es cero cuando la trayectoria es cerrada,
c) siempre está asociado a una variación de energía potencial.

El lector podría demostrar las características a) y b) en el siguiente ejercicio, puesto que la tercera ya fue demostrada anteriormente.

En la Fig. 5–15, determine el trabajo realizado por la fuerza gravitacional (peso) cuando la partícula se mueve por las siguientes trayectorias:

a) *AB*
b) *ACB*
c) *ADEFB*
d) *ADEFBCA*

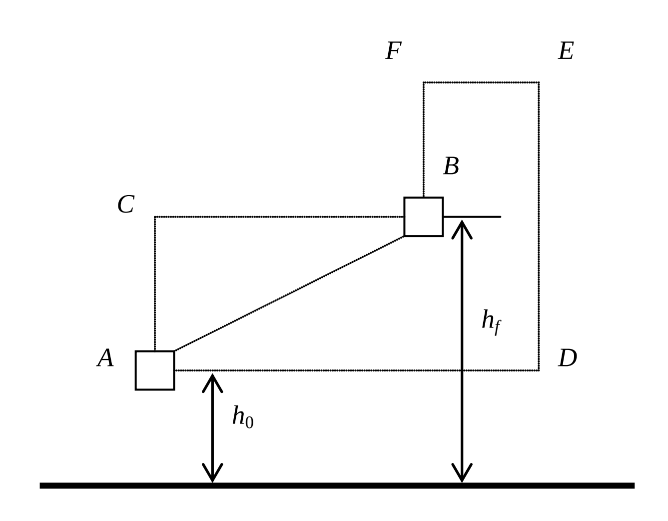


Figura 5–15

Es importante anotar que si sobre un sistema actúan únicamente fuerzas conservativas, entonces la energía mecánica del sistema se conserva; lo contrario no necesariamente es cierto, esto es, si la energía mecánica del sistema se conserva no necesariamente actúan solo fuerzas conservativas, por ejemplo, al empujar una caja con velocidad constante sobre una superficie horizontal rugosa la energía mecánica de la caja se conserva puesto que no hay variación ni de la energía cinética (velocidad constante) ni de la energía potencial gravitacional (superficie horizontal), en consecuencia, se podría concluir que tanto la fuerza con que se empuja la caja y la fuerza de rozamiento son conservativas lo cual es incorrecto porque si actuara solo una de ellas la energía mecánica del sistema aumentaría o disminuiría.

Fuerzas no conservativas

A diferencia de las fuerzas conservativas, las no conservativas son aquellas fuerzas que al actuar solas en un sistema producen cambios en la energía mecánica del mismo aumentándola o disminuyéndola.

Cuando una fuerza es no conservativa, el trabajo realizado por ella cumple con las siguientes características:

a) depende de la trayectoria,
b) es diferente de cero cuando la trayectoria es cerrada,
c) no está asociado a una variación de energía potencial.

El ejemplo más claro de este tipo de fuerzas es la fuerza de rozamiento.

En el caso de un bloque, al que se da un impulso inicial para que se mueva sobre una mesa, como se indica en la Fig. 5–16. Debido a que existe movimiento entre las dos superficies que están en contacto (la del bloque y la de la mesa), la fuerza de rozamiento que actúa sobre el bloque, realiza un trabajo resistivo (negativo) sobre él, pues en este caso la fuerza de rozamiento es contraria al desplazamiento del bloque, por lo tanto:

$$T_{fr} = f_r . \Delta x \cos 180° = -\, f_r . \Delta x$$

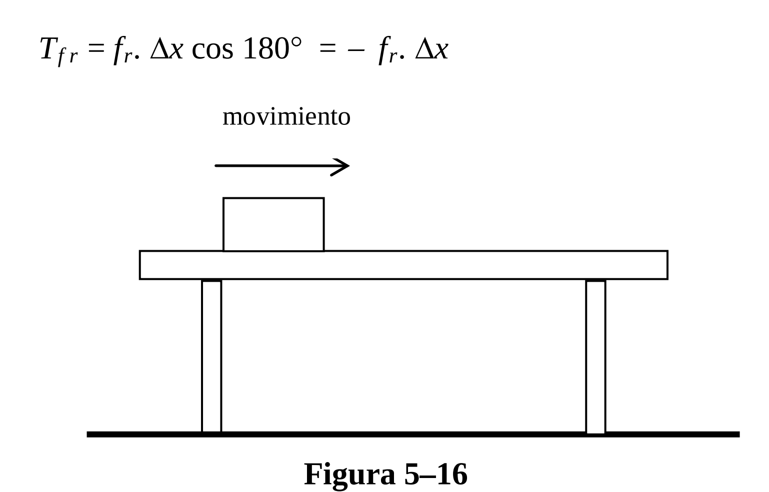


Figura 5–16

En vista de que el bloque, debido a la fuerza de rozamiento se va deteniendo, el signo negativo del trabajo del rozamiento significa que éste, está disminuyendo la energía mecánica del sistema bloque – Tierra. Cuando esto ocurre se dice que la fuerza de rozamiento, o de fricción, es una fuerza *disipativa*.

Dicho de otra manera, como el bloque se detiene, entonces la energía cinética que tenía inicialmente ya no existe. Esto no quiere decir que la energía cinética ha desaparecido, pues, según el principio de conservación de la energía, esta no se crea, ni se destruye, solo se transforma. Lo que sucede es que la energía cinética, debido a la fricción, se transforma en otra clase de energía que se denomina térmica ó calórica (Q) la misma que se disipa y produce el calentamiento (aunque imperceptible) de la mesa, del mismo bloque y del aire que los rodea; es decir, si la fuerza de rozamiento actúa como fuerza disipativa, transforma energía mecánica en calor. Por lo tanto, la cantidad de calor generada por la fricción está dada por:

$$Q = -\,T_{fr} \qquad (5\text{–}18)$$

Se inivita al lector a realizar un ejercicio similar al de la Fig. 5–15, considerando que la partícula de la Fig. 5–16 se desplaza sobre la mesa rugosa, por diferentes trayectorias, para demostrar las características 1 y 2 de las fuerzas no conservativas.

Es importante indicar que la fuerza de rozamiento no siempre es disipativa. Supongamos que la mesa de la Fig. 5–16 se encuentra sobre una superficie sin fricción y se le aplica una fuerza horizontal, de tal manera que se acelere horizontalmente, conjuntamente con el bloque. Si no se considera la resistencia del aire, aplicando la segunda ley de Newton al bloque, se puede concluir que la fuerza que hace que el bloque se acelere es la fuerza de rozamiento estática, que ejerce la mesa sobre este; en estas condiciones la fuerza de rozamiento favorece el desplazamiento del cuerpo y, por lo tanto, su trabajo respecto al suelo es positivo, por lo que la energía mecánica del bloque aumenta.

En este capítulo, solamente se consideran sistemas en los cuales la fuerza de rozamiento se comporta como fuerza disipativa, por lo que, el trabajo realizado por dicha fuerza siempre se cuantifica como energía térmica o calórica.

5.5 RELACIÓN GENERAL TRABAJO - ENERGÍA

Deducción de la relación general trabajo – energía

En la Fig. 5–17 (a) se considera una partícula de masa *m*, unida permanentemente a un resorte, que sube con aceleración, por un plano inclinado rugoso, debido a la fuerza **F** paralela al plano.

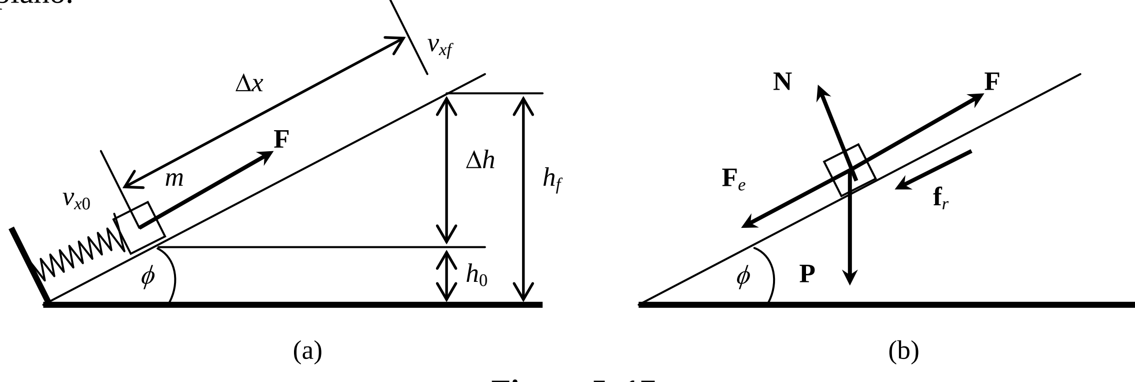


Figura 5–17

Es la situación más general que se va a analizar, en donde solo la fuerza normal, **N**, que aparece en el diagrama de fuerzas de la Fig. 5–17 (b), no realiza trabajo, por ser perpendicular al desplazamiento del bloque.

Debido a que la partícula sube con aceleración, hay una fuerza neta que realiza trabajo, el cual produce, como lo vimos anteriormente, una variación de la energía cinética, por lo que se puede escribir:

$T_n = \Delta E_c$, pero:

$T_n = \Sigma T = T_F + T_P + T_{Fe} + T_{fc}$, por lo tanto:

$$T_F + T_P + T_{Fe} + T_{fc} = \Delta E_c$$

Pero: $T_P = -\Delta E_{pg}$, $T_{Fe} = -\Delta E_{pe}$ y $T_{fc} = -Q$, entonces:

$$T_F - \Delta E_{pg}, - \Delta E_{pe} - Q = \Delta E_c$$

$$T_F = \Delta E_c + \Delta E_{pg} + \Delta E_{pe} + Q$$

Ahora bien, si a más de las fuerzas consideradas actuarían otras fuerzas como **F₁**, **F₂**, **F₃**, etc., entonces la ecuación anterior hubiera salido de la siguiente forma:

$$T_F + T_{F1} + T_{F2} + T_{F3} + \ldots\ldots\ldots\ldots = \Delta E_c + \Delta E_{pg} + \Delta E_{pe} + Q$$

o lo que es lo mismo:

$$\Sigma T_{ext} = \Delta E_c + \Delta E_{pg} + \Delta E_{pe} + Q \qquad (5\text{–}19)$$

A pesar de que esta última ecuación fue desarrollada, por facilidad, a partir de una situación particular (plano, partícula, resorte) es de validez general y por eso se la conoce como la relación general trabajo - energía.

Es importante aclarar que, si bien todas las fuerzas que actúan sobre la partícula son externas a ella, por ser ejercidas por los cuerpos que se encuentran en los alrededores de la partícula, para esta relación en el sumatorio de los trabajos externos *no se deben considerar* los trabajos realizados por el peso, la fuerza elástica y la fuerza de rozamiento, debido a que estos trabajos están considerados como cambios en las energías correspondientes, asociados a estas fuerzas propias del sistema masa-tierra-medio elástico.

Principio de conservación de la energía mecánica

La Ec. 5–19 se puede escribir de la siguiente forma:

$$\Sigma T_{ext} = E_{cf} - E_{c0} + E_{pgf} - E_{pg0} + E_{pef} - E_{pe0} + Q$$

$$\Sigma T_{ext} = (E_{cf} + E_{pgf} + E_{pef}) - (E_{c0} + E_{pg0} + E_{pe0}) + Q;$$

pero la suma de las energías cinética, potencial gravitacional y potencial elástica es la energía mecánica (E_M), por tanto la ecuación queda:

$$\Sigma T_{ext} = E_{Mf} - E_{M0} + Q, \text{ es decir:}$$

$$\Sigma T_{ext} = \Delta E_M + Q \qquad (5\text{–}20)$$

De la Ec. 5–20 se puede deducir que, si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $\Sigma T_{ext} = 0$ y $Q = 0$ ó
2. $\Sigma T_{ext} = Q$, entonces:

$\Delta E_M = 0$ por lo tanto:

$$E_{Mf} = E_{M0} \qquad (5\text{–}21)$$

Esto quiere decir que la energía mecánica del sistema se conserva, razón por la cual a esta última ecuación se conoce como el *principio de conservación de la energía mecánica.*

Generalización del principio de conservación de la energía

La relación general trabajo energía establece que, el trabajo realizado sobre (o por) un sistema siempre se puede cuantificar por la variación de las energías: cinética, potencial (gravitacional, elástica, etc.) y por la energía térmica, que se pierde como un trabajo realizado en contra de las fuerzas no conservativas como la fricción, como se ilustra en la Fig. 5–18.

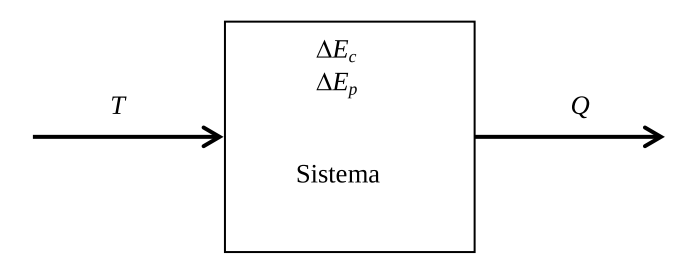


Figura 5–18

Se ha demostrado, en la práctica que, todas las fuerzas no conservativas realizan un trabajo que siempre se puede contabilizar como alguna forma de energía. Para generalizar podemos reemplazar Q por $\Delta E'$, que representa la variación en otras formas de energía interna, que ya no se pueden contabilizar como energías potencial ó cinética, por lo tanto se puede escribir que:

$$\Sigma\, T = \Delta E_c + \Delta E_p + \Delta E' \qquad (5\text{–}22)$$

Es necesario recordar que la energía potencial solo se puede asociar a las fuerzas conservativas.

Para hacer una última generalización, considere dos sistemas, S_1 y S_2, que solo pueden interactuar entre sí y no con el medio exterior. Suponga que S_2 hace un trabajo T sobre S_1, como se indica en la Fig. 5–19, debido a que S_2 no puede interactuar con el exterior sino solo con S_1, el trabajo T solo puede realizarse a costa de una disminución de su energía total, por lo tanto la energía perdida por S_2 es igual al trabajo T e igual a la energía ganada por S_1.

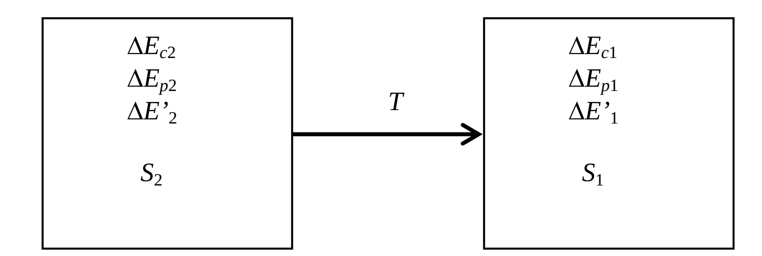


Figura 5–19

Si consideramos a S_1 y a S_2 como un solo sistema es posible prescindir del paso intermedio y escribir que:

$$\Delta E_{T1} = -\ \Delta E_{T2}$$

donde el signo menos significa que S_2 pierde energía, mientras que S_1 gana energía; pero,

$\Delta E_{T1} = \Delta E_{c1} + \Delta E_{p1} + \Delta E'_1$ y $\Delta E_{T2} = \Delta E_{c2} + \Delta E_{p2} + \Delta E'_2$, por lo tanto:

$\Delta E_{c1} + \Delta E_{p1} + \Delta E'_1 = -(\Delta E_{c2} + \Delta E_{p2} + \Delta E'_2)$

Pasando todo al lado izquierdo queda:

$\Delta (E_{c1} + E_{c2}) + \Delta (E_{p1} + E_{p2}) + \Delta (E'_1 + E'_2) = 0$, o sea:

$$\Delta E_{TS} = 0 \qquad (5\text{–}23)$$

Esta última expresión constituye el principio de conservación de la energía para todo el sistema formado por S_1 y S_2.

Si se amplía esta expresión al sistema más general que existe en la naturaleza, que es el universo, se puede concluir que su energía total siempre permanece constante, lo que quiere decir que la energía no se crea ni se destruye, solo se transforma; esto es, si una parte del universo gana energía, debe ser como consecuencia de que otra parte del mismo la pierde.

Considerando todas las formas de energía existentes, nunca se ha encontrado una violación a este principio de conservación, razón por la cual constituye un principio de carácter universal.

5.6 FUERZAS CENTRALES

Tanto la fuerza gravitacional entre dos masas puntuales, como la fuerza electrostática entre dos cargas eléctricas puntuales, son inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia relativa entre las masas o entre las cargas eléctricas respectivamente, esto, según la ley de la gravitación universal de Newton, Ec. 4–10, y según la fuerza de atracción o repulsión electrostática dada por la ley de Coulomb, Ec. 4–11. Por esta razón se pueden tratar ambas fuerzas al mismo tiempo, observando que ambas pueden ser escritas en la forma

$$F = C/r^2, \qquad (5\text{–}24)$$

donde C es una constante, distinta en cada caso.

En la atracción gravitacional entre dos masas puntuales, la fuerza **F** que actúa sobre una de ellas es colineal al segmento de línea recta que une a ambas partículas y viceversa y en su módulo se tiene un producto constante $C = GmM$, donde G es la constante de la gravitación universal, M y m son las masas de las partículas interactuantes. Para las interacciones electrostáticas entre cada par de cargas eléctricas puntuales, la fuerza electrostática **F** que actúa sobre una de ellas es colineal al segmento de línea recta que une a ambas cargas, **F** apunta hacia una u otra carga dependiendo del signo de las cargas, en todo caso se obtiene el producto constante $C = KqQ$, donde K es una constante eléctrica, que se relaciona con un parámetro denominado permitividad eléctrica, q y Q son las cargas interactuantes. En este contexto, ya que el campo y la fuerza asociada son colineales al segmento de línea recta que une a ambas partículas interactuantes, tanto la fuerza gravitacional, como la electrostática son fuerzas centrales.

Es de mucho interés el saber cuanto trabajo T se necesita realizar para trasladar la masa m desde el punto A hasta el punto B, tomando como trayectoria la línea recta que pasa por M y m, en presencia del campo gravitacional generado por M. Ver Fig. 5–11. Entonces, el radio vector posición relativa de m respecto a M, inicial y final serán $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$, respectivamente. Con esto, la magnitud de la fuerza de atracción gravitacional es variable, desde el valor

$$F_A = G\frac{Mm}{r_A^{\,2}} \quad \text{hasta} \quad F_B = G\frac{Mm}{r_B^{\,2}}.$$

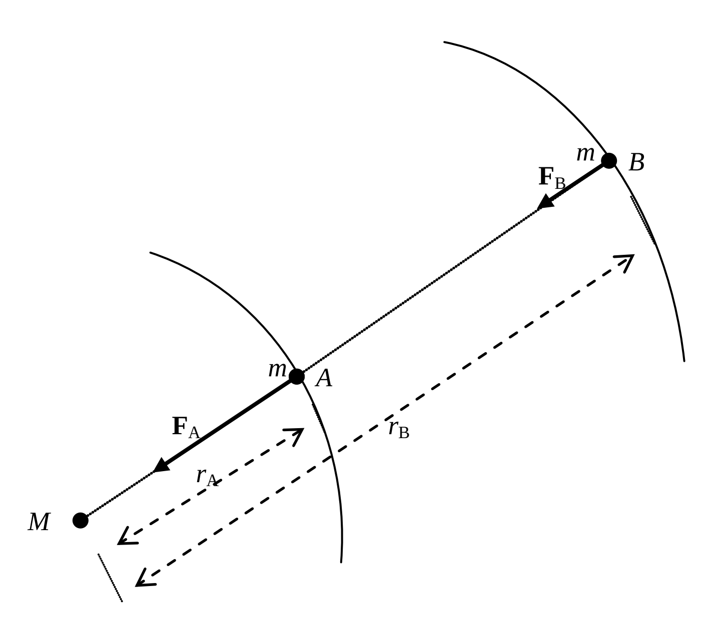


Figura 5–11 Cuerpo de masa m trasladado desde B hasta A, en el campo gravitacional del cuerpo de masa M.

Para calcular el trabajo T suponga que la trayectoria recta entre A y B está dividida en n desplazamientos muy pequeños, cada uno de longitud Δr. Dentro de cada Δr, F es prácticamente constante y como una aproximación para el T total se tendrá:

$$T = F_1(\Delta r)_1 + F_2(\Delta r)_2 + \cdots + F_{n-1}(\Delta r)_{n-1} + F_n(\Delta r)_n \quad (5\text{–}25)$$

Para conseguir una respuesta exacta se debe hacer que n tienda al infinito, entonces se tiene un problema que debe resolverse con las técnicas del cálculo integral. El valor resultante para el trabajo T, necesario para trasladar m es:

$$T = C\,(1/r_A - 1/r_B). \qquad (5\text{–}26)$$

Superficies equipotenciales

La ecuación Ec. 5–24 dice que $F = C/r^2$, donde $C = GMm$ e indica que, a una distancia r de la masa M, la fuerza gravitacional que experimenta la masa m es de igual magnitud, independiente de la dirección en que se encuentre. El lugar geométrico que cumple con esta condición, es una esfera de radio r centrada en M. Ya que la magnitud de campo gravitacional es constante en esta esfera de radio r se dice que esta superficie es equipotencial.

En cuanto al trabajo necesario para trasladarse en una superficie equipotencial se tiene:

$$T = \mathbf{F} \bullet \Delta \mathbf{r}$$

$T = F\ \Delta r \cos\theta$, donde $\theta = 90^{\circ}$, y por tanto $\cos\theta = 0$, así

$T = 0$, el trabajo resulta nulo.

Cuando una partícula se mueve por cualquier camino en una superficie equipotencial, sin fricción, el trabajo realizado para tal movimiento es igual a cero; es decir, no se gasta energía alguna para trasladarse de un punto cualquiera a otro, en una superficie equipotencial.

El trabajo conservativo es independiente de la trayectoria seguida

Al resolver el problema de cuanta energía se debe gastar o cuanto trabajo se debe realizar para trasladar una masa inmersa en un campo gravitacional conservativo, entre dos puntos cualesquiera *A* y *D*, también quedará resuelto el problema de cuanto trabajo debe realizarse para trasladar una carga eléctrica puntual *q*, entre dos puntos cualquiera *A* y *D*, del espacio, en presencia de un campo electrostático generado por la carga eléctrica puntual *Q*.

Suponga que la masa *M* es la fuente del campo gravitacional, en una región del espacio donde se encuentran S_1 y S_2, dos superficies equipotenciales; donde los puntos de S_1 tienen un mismo valor de campo gravitacional y similarmente todos los puntos de S_2 tienen otro valor constante de campo gravitacional. Entonces se traslada la masa *m* desde el punto *A* en S_1 hasta el punto *D* en S_2, como se muestra en la Fig. 5–14. En los trayectos *AB* y *CD* no se requiere gastar energía alguna para trasladar *m* y solamente se requiere un trabajo diferente de cero en el tramo *BC*, en el que se aplica la Ec. 5–26.

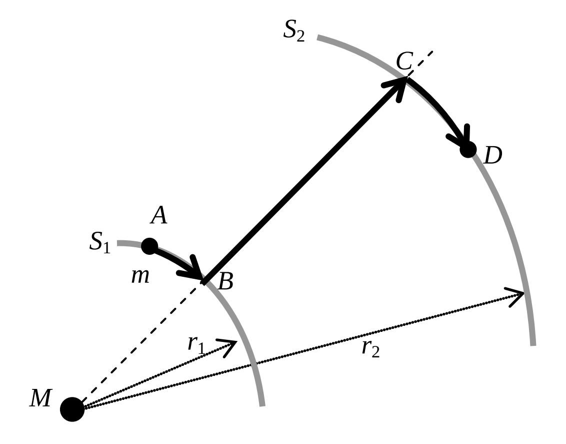


Figura 5-14. Traslado de la masa *m* de *A* y *D*.

Similarmente, en la Fig. 5–15, la masa *m* se traslada entre los mismos puntos *A* y *D*, pero recorre los arcos equipotenciales: l_1, l_3, l_5, l_7, en los que no se requiere trabajo alguno y por los segmentos radiales: l_2, l_4, l_6, en los que se aplica la Ec. 5–26, que es lo mismo que aplicar esta ecuación al segmento radial *BC* de la Fig. 5–14.

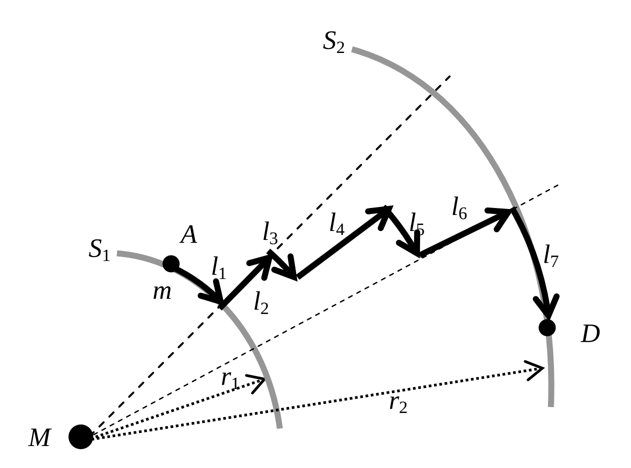


Figura 5-15 Traslado de la masa *m* entre los puntos *A* y *D*, por una trayectoria que se descompone en los segmentos circulares equipotenciales y en segmentos radiales.

Como se puede ver en las Figs. 5–14 y 5–15, las trayectorias entre los puntos *A* y *D* son diferentes; sin embargo, el trabajo requerido para trasladar *m* entre estos puntos es el mismo. Entonces podemos deducir lo siguiente:

a) El trabajo necesario para trasladar *m* desde *A* hasta *D*, depende solamente de la constante *C* = *GMm* y de la ubicación de los puntos *A* y *D*, según indica la Ec 5–26.

b) Si la masa *m* se traslada por cualquier trayectoria, de manera que finalmente regresa al punto de partida, entonces el trabajo realizado para tal recorrido es cero.

Cuando se tiene un campo eléctrico generado por una carga puntual *Q* en reposo, en cuya región se tienen las superficies equipotenciales eléctricas S_1 y S_2 y se requiere trasladar una carga eléctrica puntual *q*, desde el punto *A* hasta el punto *D*, sin considerar el rozamiento, el trabajo necesario para dicho traslado no depende de la trayectoria seguida, sino solamente de la constante *C*= *KQq* y de la ubicación de los puntos *A* y *D*, según la Ec. 5–26. Por otro lado, si la carga vuelve al punto de partida usando cualquier trayectoria, el trabajo requerido en este caso es cero.

Energía potencial en el campo de una fuerza del inverso del cuadrado

Calcule ahora el *T* realizado y de aquí el cambio de E_p al llevar *m* desde una distancia inicial r_A desde *M*, hasta una gran distancia (infinita) de *M*. Aquí $1/r_B$ tiende a cero, de modo que $\Delta E_p = C/r_A$. Designando a la cantidad $-C/r_A$, *como la energía potencial en A*, vemos que la Ec.5–26 se puede escribir como:

$$C\,(1/r_A - 1/r_B) = C/r_A - C/r_B = E_{pB} - E_{pA} = \Delta E_p\ ,$$

que es consistente con el nombre original ΔE_p. En esta última ecuación, *B* puede ser cualquier punto, no necesariamente el infinito. En general, la E_p del sistema, con *m* a una distancia *r* de *M* está dada por:

$$E_p = -\,C/r. \qquad (5\text{–}27)$$

5.7 APLICACIONES DEL PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

Sistemas y entornos

Cuando se centra la atención en una pequeña porción del universo, al cual se llama sistema, es importante definir sus límites o bordes. Un sistema puede ser un solo objeto o partícula, un conjunto de objetos o partículas, una región o zona del espacio y puede variar de forma o tamaño (como por ejemplo el gas dentro de un pistón).

Sistemas aislados

Las aplicaciones mejor tratadas por el principio T-E son aquellas en las cuales el sistema analizado *está aislado de su entorno*, de modo que, *ninguna fuerza externa actúa sobre (o por) el sistema.* Si no actúan fuerzas externas, *los alrededores no realizan ningún trabajo sobre el* ***sistema*** *y a su vez el* ***sistema*** *no realiza ningún trabajo sobre los alrededores.* El trabajo realizado por o en contra de la gravedad se puede cuantificar por el cambio en la E_p gravitacional en un sistema Tierra-partícula.

Conservación de la energía

Para los *sistemas aislados*, el principio T-E viene expresado por:

$$\Delta E_M = T = \Delta E_c + \Delta E_{pg} + \Delta E_{pe} + T'$$

E total inicial del sistema = *E* total final del sistema.

Si solamente está involucrada la *E mecánica*, la ecuación es:

$$E_{p0} + E_{c0} = E_{pf} + E_{cf}\,.$$

Por otro lado, la ecuación anterior puede incluir otras formas de energía cuando estas son importantes, como por ejemplo: la energía calorífica, la energía eléctrica, la energía nuclear.

Este principio, afirma que, *si un sistema está aislado de su entorno, la energía total del sistema permanece invariable durante cualquier proceso*, sin importar los detalles del mismo. Puede haber y, en efecto existen, cambios en cada *clase* de energía durante el proceso. Parte de la E_c puede convertirse en E_p o la energía potencial eléctrica, en energía nuclear; pero, la cantidad total de energía en el sistema permanecerá constante. De manera que en un sistema

aislado la E total es constante; **la energía se conserva**. Este es un *teorema de conservación* y es una de las leyes más importantes de la física. Es necesario enfatizar que es una ley válida solo para *sistemas aislados*; es decir, sobre los cuales actúan solo fuerzas conservativas como la gravitacional y la eléctrica, aquellos sistemas en los cuales su T puede ser expresado en términos de cambios en la E_p.

Los siguientes ejemplos tratan de desarrollar una mejor comprensión del principio de conservación de energía.

Péndulo simple

Ejemplo 1. Un péndulo simple consiste en una pequeña esfera de masa m atada al extremo de una cuerda ligera e inextensible de longitud L. Se lleva a m hacia un lado, de manera que la cuerda forma un ángulo θ_0 con la vertical y se la abandona desde el reposo. Encuentre la rapidez de la esfera cuando alcanza el punto más bajo, si se desprecia la fricción con el aire.

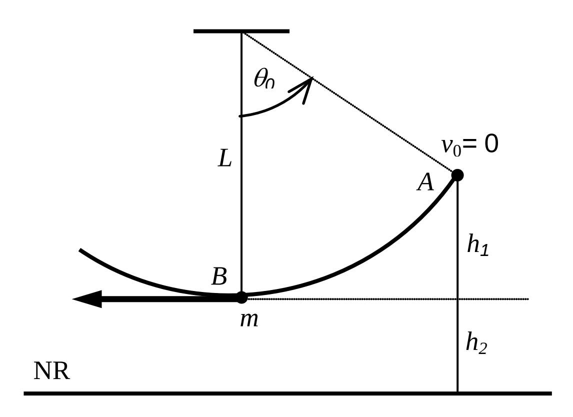


Figura 5.7.1 Péndulo

Solución. Al inicio $Ec_0 = 0$ ya que el péndulo es abandonado desde el reposo en el punto A, de acuerdo con la Fig.5.7.1. Con respecto al nivel arbitrario de referencia (NR) se tiene que la energía potencial gravitacional es:

$$E_{p0} = mg\,(h_1 + h_2).$$

Si no existe la fricción del aire no se necesita considerar el trabajo realizado por la fricción sobre el péndulo. La fuerza gravitacional actúa sobre la esfera, pero es una fuerza conservativa. La tensión de la cuerda es perpendicular al desplazamiento en todo instante, por lo que *no hace trabajo* sobre la esfera. De acuerdo con el principio de conservación de energía (PCE), la energía de la esfera se conserva, por lo que se tiene:

$$mg\,(h_1 + h_2) + 0 = mgh_2 + ½mv_f^2, \text{ luego}$$

$$v_f = \sqrt{2gh_1}\,. \qquad (5.7\text{–}1)$$

Este resultado se puede expresar en función de L y θ_0 ya que:

$$h_1 = L - L\cos\theta_0 = L\,(1 - \cos\theta_0),$$

así que:

$$v_f = \sqrt{2gL(1-\cos\theta_0)}\,. \qquad (5.7\text{–}2)$$

Note que la v_f, como está dada en la Ec. 5.7–1, es exactamente la *rapidez* de un objeto que cae *verticalmente* desde una altura h_1. El estudiante podría demostrar que la esfera después de pasar por *B*, alcanzará su altura original $h_1 + h_2$, sobre el nivel de referencia (NR).

Un físico, que tenga confianza en la ley de la conservación de la energía, podría dejar caer la esfera de un péndulo simple desde su barbilla y observarlo como oscila a través de un arco y regresa hasta su barbilla, sin experimentar ningún impacto cuando el péndulo regresa hacia él. Sin embargo, debería tener sumo cuidado de no *empujarlo* en e1 momento de soltarlo, ya que sería impactado por el péndulo a su retorno.

El rizo

Ejemplo 2. Un rizo es una pista que contiene un móvil sin motor y con mínima fricción. El móvil parte desde una altura determinada desde donde se deja caer a lo largo de la pista. La Fig. 5.7.2 muestra dicha pista. El móvil parte desde el reposo en el punto *A* y viaja dentro de la parte circular de radio *R*. ¿Cuál debe ser la *mínima* altura *h* de *A* para que el carro no abandone la trayectoria en *B*, que es el punto más alto del circulo? Desprecie la fricción.

Solución. En cualquier punto de la trayectoria del móvil, las dos únicas fuerzas que actúan sobre él son su peso y la reacción de la pista.

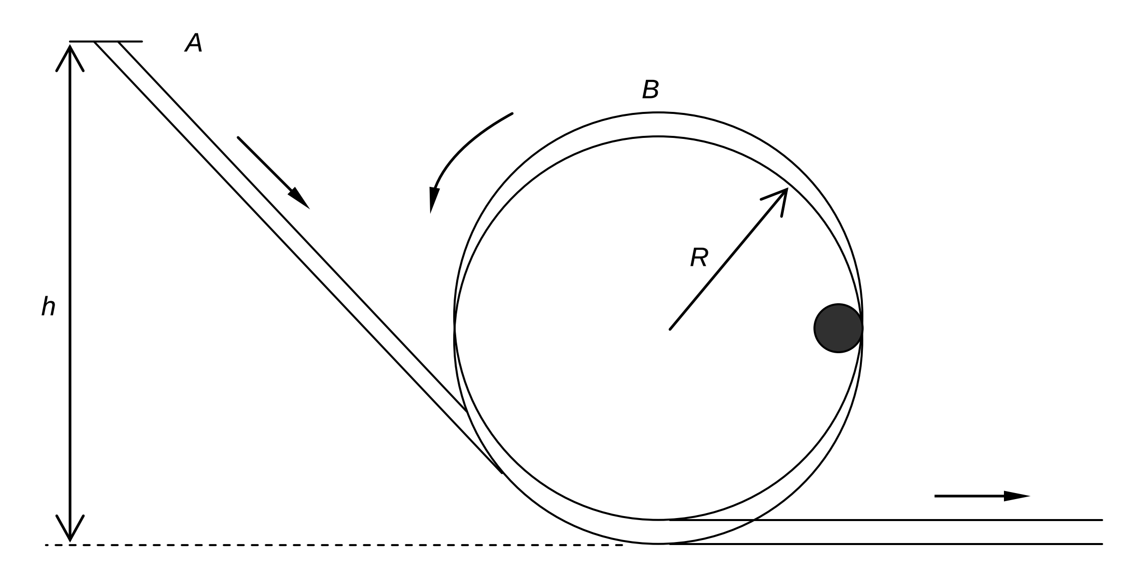


Figura 5.7.2 El móvil recorre el rizo sin abandonarlo.

Ya que esta última fuerza (Normal) forma un ángulo recto con la pista (que no exista fricción significa que la pista no ejerce fuerzas tangenciales), esta fuerza no hace trabajo, porque está siempre perpendicular al desplazamiento. La única función de la fuerza Normal, de la pista sobre el carro, es la de cambiar la dirección y no la rapidez del carro.

El trabajo realizado por e1 peso, que es una fuerza conservativa, no cambia la energía mecánica total del carro. Se ve, entonces, que se puede escribir la ley de conservación de la energía como:

$$E_{pA} + E_{cA} = E_{pB} + E_{cB} \quad \text{ó}$$

$$\cancel{m}gh + 0 = \cancel{m}g(2R) + ½\cancel{m}v_B^2,$$

donde v_B es la rapidez del carro en el punto B.

Se debe tener información adicional para determinar h a partir de la ecuación anterior. Si el carro no debe abandonar la pista circular en ningún punto, la fuerza neta sobre el carro debe ser justamente la necesaria para mantener el movimiento circular en el rizo de radio R; esto quiere decir que la fuerza neta debe ser la fuerza centrípeta requerida, en B. En este punto, las dos fuerzas aplicadas sobre e1 carro son su peso $m\mathbf{g}$ verticalmente hacia abajo y la reacción de la pista $\mathbf{N}$, también verticalmente hacia abajo. Se tiene:

$$mg + N = \frac{mv_B^2}{R}. \qquad (5.7\text{–}3)$$

A mayor v_B mayor es la reacción de la pista. El valor más pequeño de v_B es aquel para el cual $N = 0$:

$$mg = \frac{mv_B^2}{R}. \qquad (5.7\text{–}4)$$

Así, cuando $v_B^2 = gR$, la pista no ejerce fuerza sobre el carro en B y únicamente el peso del carro es el necesario para mantener el movimiento circular. Si la v_B fuere menor que $\sqrt{gR}$, mg sería mayor que la fuerza centrípeta necesaria, ocasionando que el carro deje la pista.

Combinando, las Ecs. 5.7–3 y 5.7–4 anteriores, se tiene:

$$gh = 2gR + ½gR,$$

$$h = 5/2\ R.$$

Movimiento de Satélites (Velocidad de escape)

Ejemplo 3. Algunos cohetes espaciales de prueba, han "escapado del campo gravitacional de la Tierra", en el sentido de que su v_0 fue tan grande, que no retornaron a la Tierra. (Se sabe que e1 campo gravitacional de la Tierra se extiende por todo el espacio, de modo que no es cierto que se pueda escapar de él). ¿Cuál es la rapidez mínima de un cohete, que le permita "escapar del campo gravitacional terrestre"? Desprecie la fricción con el aire.

Solución. Primero se planteará un problema un tanto más general. Suponga que se lanza un cohete verticalmente desde la Tierra, con una rapidez inicial v_0. ¿Cuál es la altura que alcanza? (Asumimos que todo el combustible del cohete es consumido inmediatamente luego del lanzamiento, cuando el cohete está todavía cerca de la superficie terrestre).

Este problema se resuelve fácilmente usando el PCE para el cohete. A medida que el cohete sube, la E_c del mismo se convierte en E_p; a medida que gana altura, su rapidez disminuye. Ya que no existen fuerzas externas no conservativas que actúen sobre el cohete cuando sube, el cambio de energía mecánica total es nulo. Aplicando el PCE se tiene:

$$E_{p0} + E_{c0} = E_{pf} + E_{cf} \text{ ó}$$

$$E_{cf} - E_{c0} = E_{p0} - E_{pf} \text{ ó} \qquad (5.7\text{–}5)$$

$$\Delta E_c = -\Delta E_p \text{, ahora}$$

$$\Delta E_c = 0 - ½mv^2,$$

donde m es la masa del cohete y v su rapidez luego del lanzamiento, cuando el combustible se consumió. Puesto que el incremento de la E_p gravitacional está dada por:

$$\Delta E_p = C\,(1/r_A - 1/r_B);$$

donde C = GmM_T, $r_A = R_T$ = radio de la Tierra, M_T = masa de la Tierra y r_B es la máxima distancia alcanzada por el proyectil desde el centro de la Tierra, asumiendo que el final de la combustión ha ocurrido muy cerca de la superficie de la Tierra.

La Ec. 5.7–5 se convierte en:

$$-½mv^2 = -GmM_T\,(1/R_T - 1/r_B) \text{ ó}$$

$$v^2 = 2GM_T\,(1/R_T - 1/r_B),$$

que es independiente de la masa del cohete.

Retornando al problema original, se ve que debido a que el campo gravitacional de la Tierra se extiende sin límite hacia afuera de la misma, para que el cohete escape de él, es necesario que $r_B \to \infty$ y $1/r_B \to 0$, entonces:

$$v^2_{\text{escape}} = \frac{2GM_T}{R_T} \text{ ó} \qquad (5.7\text{–}6)$$

$$v_{\text{escape}} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$$

Recordando que la aceleración de la caída libre en la superficie terrestre está dada por:

$$g = \frac{GM_T}{R_T^2},$$

se puede reescribir la Ec. 5.7–6 como:

$$v_{\text{escape}} = \sqrt{2gR_T}\,. \qquad (5.7\text{–}7)$$

Usando los valores conocidos de las constantes, se tiene que:

$$v_{\text{escape}} = \sqrt{2(9{,}80\,\text{m/s}^2)(6{,}36\times 10^6\,\text{m})}$$

$$v_{\text{escape}} = 1{,}1 \times 10^4 \text{ m/s.}$$

En todos los ejemplos presentados, hasta aquí, se ha visto que la E_c y la E_p *gravitacional*, bajo circunstancias apropiadas, se pueden convertir una en otra, En el próximo ejemplo se verá que la E_c y la E_p *eléctrica* también se pueden transformar una en otra.

Máximo acercamiento de partículas cargadas

Ejemplo 4. Dadas dos partículas de masas m_1 y m_2, que tienen cargas $+q_1$ y $+q_2$, respectivamente (todo lo que sigue será válido también para dos partículas cargadas *negativamente*). La partícula m_1 se mantiene estacionaria y la otra es lanzada directamente hacia ella desde una gran distancia, con rapidez inicial v. Encuentre la distancia de máximo acercamiento de m_2 a m_1.

Solución. La única fuerza que actúa sobre m es la fuerza electrostática de Coulomb. Se vio antes, que esta es una fuerza central y por lo tanto conservativa. Entonces se pueden calcular los cambios de la E_p *eléctrica* a partir de la Ec. 5–27.

$$\Delta E_p = C\,(1/r_0 - 1/r_f),$$

con la constante $C = -\,kq_1q_2$. El valor negativo de C es necesario, ya que en este ejemplo se trata con una fuerza *repulsiva*. Si m_2 comienza a una distancia r_0 de m y va hasta un punto a una distancia r_f de m_1, e1 cambio de la E_p eléctrica es:

$$\Delta E_p = -\,kq_1q_2\,(1/r_0 - 1/r_f)$$

$$= kq_1q_2\,(1/r_f - 1/r_0). \qquad (5.7\text{–}8)$$

Verifique que la Ec. 5.7–8 es consistente. Si q_2 se mueve hacia q_1, $r_f < r_0$, luego $1/r_f > 1/r_0$ y ΔE_p es positiva, por tanto la $E_{pf} > E_{p0}$. Así, cuando las cargas positivas están más cercanas, su E_p es mayor. Esto es justamente lo que se debía esperar: si se abandona a q_2 cerca de q_1, q_2 se alejaría rápidamente de q_1, con lo cual gana E_c, mientras pierde E_p eléctrica.

Ahora, en la práctica es conveniente que q_2 comience a moverse desde el infinito de modo que $1/r_0 = 0$ y

$$\Delta E_p = kq_1q_2/r_f.$$

Si r_f es el máximo acercamiento de q_2 a q_1, la rapidez de q_2 a esa distancia es 0 y $E_{cf} = 0$. Luego

$$\Delta E_c = 0 - \tfrac{1}{2}m_2v^2.$$

Usando la ley de la conservación de la energía se tiene:

$$-\tfrac{1}{2}m_2v^2 = -kq_1q_2/r_f\ ,$$

$$r_f = \frac{2kq_1q_2}{m_2v^2}\,. \qquad (5.7\text{-}9)$$

Esto resuelve el problema planteado. Dos puntos importantes se ilustran en este problema. El primero, muestra que es posible convertir la E mecánica, (E_c) en E_p eléctrica y viceversa. Después de que q_2 se frena y se detiene en r_f, su trayectoria se invierte, para luego alejarse rápidamente hasta el infinito, donde llega con la misma rapidez v, con la que comenzó. Este simple ejemplo muestra que para usar el principio T-E consistentemente, se debe tener en cuenta la transformación de una clase de energía en otra. Esta transformación, de E_c en E_p y viceversa, es una característica fundamental de las fuerzas conservativas, como las fuerzas gravitacionales y electrostáticas, debido a que la E_p solo se puede definir para fuerzas conservativas.

El cambio de E_P es independiente del nivel de referencia

El segundo aspecto es que para cualquier clase de energía potencial, lo significativo es la *diferencia* de energía potencial E_P. Se puede tomar la energía potencial E_P igual a cero en cualquier punto que se desee, usualmente el que más convenga. A veces se toma a la superficie terrestre como nivel de referencia en el que la energía potencial E_P gravitacional (o eléctrica) es cero. En el problema del péndulo simple se podía haber tomado el punto más bajo del movimiento (punto B de la Fig.5.7.1) como el punto donde la energía potencial E_P es cero (NR); esto habría sido más conveniente. A veces se toma la energía potencial E_P en el infinito como cero, como se hizo en el ejemplo anterior. Recordando que:

$$E_P = -C / r, \qquad (5\text{–}27)$$

se ve que cuando $r \to \infty$, $E_P \to 0$, de modo que el *cambio* de energía potencial E_P es igual a la E_P en el punto más cercano. Si se hubiera asignado a la E_P en el infinito un valor diferente de cero, diga 10 J, entonces la E_P en el punto más cercano habría sido:

$$\frac{kq_1q_2}{r_f} + 10 \text{ Joules}$$

y ΔE_P todavía sería kq_1q_2 / r_f. Sumar una constante arbitraria a la expresión de la energía potencial E_P no afecta la ΔE_P.

Fusión nuclear

El ejemplo 4 es de mucha importancia práctica en el campo de la física nuclear. A fin de inducir la fusión de protones (núcleos de hidrógeno) en deuterio y helio, el cual es uno de los procesos básicos en las estrellas, los protones deben estar separados una distancia menor a 5×10^{-15} m, aproximadamente, donde la fuerza de atracción nuclear fuerte tiene lugar. Para mantenerlos juntos, los protones deben viajar a gran velocidad para vencer la fuerza de repulsión electrostática debido a que tienen la misma carga, llamada, $+e$. Asumiendo que un protón está en reposo, con el empleo de la Ec. 5.7–9, para obtener la mínima velocidad requerida, se tiene que:

$$v=\sqrt{\frac{2kq_1q_2}{mr_f}}=e\sqrt{\frac{2k}{mr_f}}$$

$$=(1{,}6\times10^{-19})\sqrt{\frac{2(9\times10^9)}{(1{,}67\times10^{-27})(5\times10^{-15})}}$$

$$=7\times10^6 \text{ m/s.}$$

El estudiante podría trabajar la conversión de unidades aquí. Este resultado muestra un valor de velocidad muy grande, pero que solamente representa el 2.3% del valor de la velocidad de la luz, por lo que las correcciones que hace la teoría de la relatividad especial son probablemente innecesarias.

Movimiento de un satélite

Ejemplo 5. Dos partículas de masas muy diferentes se atraen mutuamente con una fuerza dada por la ley del inverso al cuadrado,

$$F=\frac{C}{r^2}.$$

La partícula de masa más pequeña gira alrededor de la masa mayor en una trayectoria circular. (Se está asumiendo que la masa de la partícula es infinita y por ello no se mueve). Ejemplos de esta clase de movimiento anteriormente estudiados son los satélites que gravitan y el átomo de hidrógeno, regidos por la ley de la gravitación universal de Newton y por la ley de Coulomb, respectivamente.

Solución. En el tratamiento de todas las fuerzas que cumplen la ley del inverso al cuadrado, es más conveniente tomar el cero de E_P en el infinito. Entonces la E_P a una distancia r está dada por la Ec. 5–27, como:

$$E_P=-\frac{C}{r}.$$

Por otra parte, la energía total E_T para una órbita circular de radio r es:

$$E_T = E_C + E_P = \tfrac{1}{2}mv^2 - \frac{C}{r}. \qquad (5.7\text{–}10)$$

La fuerza de atracción sobre el cuerpo que está girando es la fuerza centrípeta necesaria para mantener el movimiento circular, esto es:

$$\frac{C}{r^2} = \frac{mv^2}{r}, \text{ por lo que:}$$

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = \frac{C}{2r}. \qquad (5.7\text{–}11)$$

Reemplazando en la Ec. 5.7–10, se tiene que la energía total de la partícula en órbita es:

$$E_T = \frac{C}{2r} - \frac{C}{r} = -\frac{C}{2r}; \text{ es decir,}$$

Energía total de un satélite

$$E_T = \tfrac{1}{2}E_P. \qquad (5.7\text{–}12)$$

Note que la energía total E_T del sistema es *negativa*. La energía total E_T debe ser negativa para *todo sistema ligado* (estable) (si tomamos $E_P = 0$ en el ∞). Una energía potencial E_P negativa significa que se debe realizar trabajo externo para llegar hasta un nivel de $E_P = 0$; es decir, a no ser que agentes externos realicen trabajo sobre el sistema para separar a las partículas, el sistema permanece en equilibrio estable. Si, en cambio, la fuerza entre las dos partículas es de repulsión, la energía total será positiva, y el sistema se apartará, como en el ejemplo 4. En tal caso no existirían órbitas estables.

Trabajo y energía en el movimiento de rotación

Ejemplo 6. Una partícula de masa m gira en un círculo horizontal de radio r. Determine una expresión para la energía cinética de la partícula y para el trabajo empleado en acelerar la partícula, en términos de cantidades angulares.

Solución. Se podría obtener fácilmente una expresión para la energía cinética E_C a partir de su definición:

$$E_C = \tfrac{1}{2}mv^2,$$

donde v es la rapidez tangencial y se relaciona con la rapidez angular ω por medio de la expresión $v = \omega r$.

Energía cinética rotacional

Entonces,

$$E_C = \tfrac{1}{2}(mr^2)\omega^2 = \tfrac{1}{2}I\omega^2, \qquad (5.7\text{–}13)$$

donde I es la inercia rotacional (momento de inercia) de m en su movimiento ($I = m\, r^2$). De la Ec.5.7–13, se puede escribir la E_C de una partícula en órbita, en términos de su velocidad angular e inercia rotacional. La expresión $I\omega^2/2$ es también válida para determinar la E_C de sistemas de partículas de cuerpos rígidos en rotación con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ respecto de un centro de rotación. En estos casos, el valor correcto de I deberá ser empleado.

El lector notará la similitud de las fórmulas $I\omega^2/2$ y $mv^2/2$. Podría trabajar, también, con las unidades en la expresión $I\omega^2/2$ y obtener Joules.

En cuanto al trabajo realizado para acelerar la partícula, según la Ec. 3–17, un torque constante no equilibrado $\boldsymbol{\tau}$ producirá una aceleración angular constante $\boldsymbol{\alpha}$:

$$\boldsymbol{\tau} = I\boldsymbol{\alpha}.$$

Pero la aceleración angular constante implica un cambio en la velocidad angular dada por:

$$\omega_f^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta\ ,$$

donde θ es el ángulo girado en radianes mientras dura la aceleración. Multiplicando la última ecuación por $I/2$ queda:

$$\tfrac{1}{2}\, I\omega_f^2 = \tfrac{1}{2}\, I\omega_0^2 + I\alpha\theta,$$

o

$$\Delta E_C = \tau\,\theta, \text{ donde} \qquad (5.7\text{–}14)$$

$$\Delta E_C = \tfrac{1}{2}\, I\omega_f^2 - \tfrac{1}{2}\, I\,\omega_0^2$$

y

Trabajo realizado por el torque

La Ec. 5.7–14 es realmente la aplicación del principio del trabajo-energía, usado en este problema, ya que el movimiento circular es horizontal, $\Delta E_P = 0$. Por lo tanto, se identifica a $\tau\theta$ como el trabajo T realizado sobre la partícula, cuando gira un ángulo θ, por lo que se puede escribir el trabajo T realizado por un torque al girar un ángulo θ, como:

$$T = \tau\,\theta. \qquad (5.7\text{–}15)$$

En el estudio del movimiento angular de una sola partícula, usualmente, no hay ventaja en usar la Ec. 5.7–14 comparada con la expresión $T = \Delta E_c$. Para sistemas de partículas en rotación, incluidos los cuerpos rígidos, las Ecs. 5.7–13 y la 5.7–15 son muy útiles. En un sistema complejo que incluye tanto movimiento de traslación como de rotación se tiene:

$$T = \Delta E_P + \Delta E_C + T', \qquad (5.7\text{–}16)$$

Expresión que debe considerar T, como la suma de los trabajos hechos por los torques y por las fuerzas, y ΔE_C, escrita tanto en términos de la E_C rotacional, como de la E_C traslacional.

5.8 POTENCIAL Y DIFERENCIA DE POTENCIAL

En general, el trabajo para mover una masa o una carga eléctrica desde el punto A hasta el punto B está dado por la Ec. 5–26, $T = C\,(1/r_A - 1/r_B)$, donde la constante $C = GMm$, para el caso gravitacional; mientras, la constante $C = KQq$, para el caso electrostático, por lo que:

$$T = \frac{GMm}{r_A} - \frac{GMm}{r_B}, \text{ para el caso gravitacional} \qquad (5\text{–}28)$$

$$T = \frac{K\,Qq}{r_A} - \frac{KQq}{r_B}, \text{ para el caso electrostático} \qquad (5\text{–}29)$$

El concepto de potencial eléctrico aparece analizando la misma Ec. 5–26 en otros términos, de modo que se tendría:

$$T = m\left(\frac{GM}{r_A} - \frac{GM}{r_B}\right), \text{ para el caso gravitacional, y}$$

$$T = q\left(\frac{KQ}{r_A} - \frac{KQ}{r_B}\right), \text{ para el caso electrostático.}$$

En estas expresiones el trabajo está separado en dos factores, de manera que el factor entre paréntesis no depende de la masa m trasladada en el caso gravitacional, así como tampoco de la carga trasladada en el caso electrostático, pues estos factores deben depender exclusivamente, de las propiedades del campo gravitacional generado por M en el punto donde se ubica m; y, de manera similar, de las propiedades del campo eléctrico generado por Q, en el punto donde se ubica q.

La expresión GM/r_A se denomina *potencial gravitacional* en el punto A, donde se ubica la masa m; mientras que, de manera similar, KQ/r_A se define como el *potencial eléctrico* en el punto A, donde se ubica la carga eléctrica q.

Si el potencial eléctrico en el punto A se denota por V_A, entonces:

$$V_A = \frac{KQ}{r_A}. \qquad (5\text{–}30)$$

Las unidades en que se mide el potencial eléctrico en el sistema internacional es el voltio, que se denota por V, es útil recordar que 1V = 1 J/C.

El trabajo que hay que realizar para trasladar una carga eléctrica q, desde el punto A hasta el punto B, en una región donde existe el campo eléctrico generado por Q es:

$$T = q\,(V_A - V_B) = -\,q\,(V_B - V_A)\text{ , así}$$

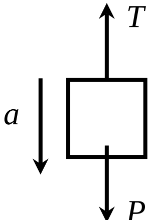
$$T = -\,q\,\Delta V, \qquad (5\text{–}31)$$

donde $\Delta V = (V_B - V_A)$ se denomina *diferencia de potencial eléctrico* entre los puntos A y B, también se acostumbra llamar *voltaje* entre los puntos A y B.

PROBLEMAS

5.1 TRABAJO

1. Un ascensor de 500 kg parte del reposo y baja con una aceleración constante de 0.5 m/s^2. Determine el trabajo efectuado por el cable que soporta el ascensor en los primeros 10 m y en los siguientes 10 m.



$\Sigma\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$

$P - T = m\,a$

$T = W - ma = m\,(g - a)$

$T = 500\,(10 - 0.5)$

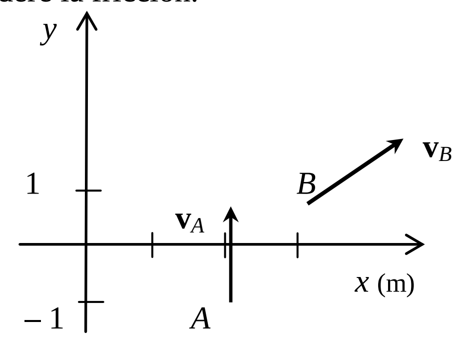
$T = 4750$ N

a) $T_T = T\,|\Delta\,\mathbf{r}|\cos 180° = 4\,750 \times 10\,(-1)$

$T_T = -\,47\,500$ J

b) $T_T = -\,47\,500$ J

2. Sobre una partícula de masa m = 0.01 kg actúa una fuerza externa **F**. Si la partícula parte de punto A(2,-1) m con una velocidad de 3 **j** m/s y llega al punto B(3,1) m con una velocidad de **i** + 3**j** m/s. ¿Cuál es el trabajo realizado por la fuerza **F** entre A y B? El eje y es vertical. No considere la fricción.



$E_{MA} + T_F = E_{MB} + T_{fr}$

$½\ m\ v_A^2 + T_F = m\ g\ h_B + ½\ m\ v_B^2$

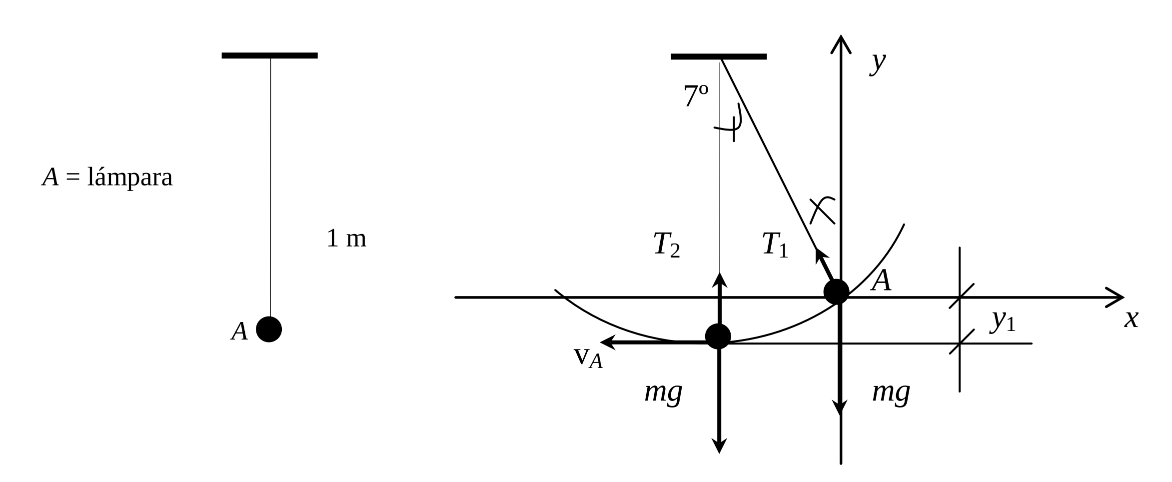
$T_F = m\ (g\ h_B + ½\ v_B^2 - ½\ v_A^2)$

$h_B = 2$ m ; $v_A = 3$ m/s; $v_B = \sqrt{10}$ m/s

$T_F = 0.01\ (10 \times 2 + ½\ (\sqrt{10})^2 - ½\ (3)^2)$

$T_F = 0.205$ J

3. Del techo de una habitación cuelga una lámpara que pesa 200 N, sostenida por una cuerda de 1 m de longitud que puede soportar una tensión máxima de 202 N. Se produce un temblor que desplaza a la lámpara 7º de la vertical. Determine si la lámpara cae o no al suelo.



$\Sigma Fy = 0$

$T_1 \cos 7º = m\ g$

$T_1 = m/\cos 7º$

$T_1 = 201.5$ N

$T_{F\ no\ conserv\ 1 \to 2} = \Delta E_M = 0$

$E_{M2} = E_{M1}$

$½\ m\ v_2^2 + 0 = Ec_1 + m\ g\ y_1$

$v_2^2 = 2\ g\ (1 - \cos 7º)$

$\Sigma F_n = m\ a_{c\ 2}$

$T_2 - mg = m\ v_2^2\ /1$

$T_2 = m\ 2\ g\ (1\text{-}\cos 7º) + m\ g$

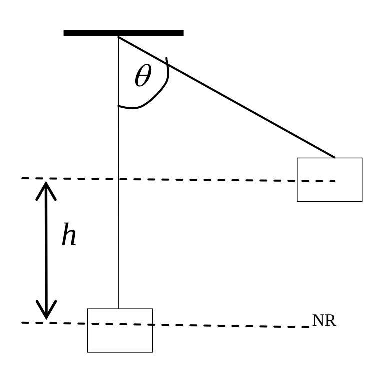
$T_2 = 1.015\ m\ g$

$T_2 = 202.98$ N

$T_2 > T_{máx}$.

Entonces, la lámpara cae.

4. Un bloque que pesa 2 200 N se suspende de una cuerda de longitud 1.2 m. El bloque se empuja lateralmente 30º desde la vertical y se lo mantiene allí. ¿Cuánto trabajo se ha hecho para llevarlo a dicho punto?



$T = \Delta EM + T'$

Si T'=0, se tiene:

$T = \Delta Ec + \Delta Ep$

$T = ½\ m\ (v_f^2 - v_o^2\ ) + m\ g\ h$

Si $v_o = 0$, se tiene:

$T = m\ g\ h$

$T = 2\ 200\ h$

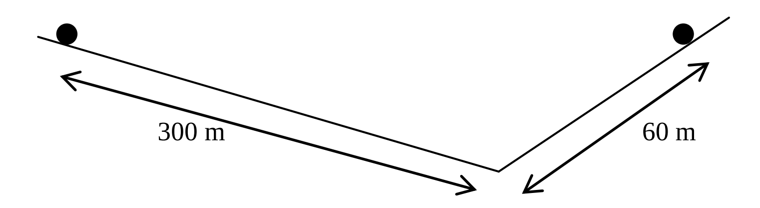
$h = 1.2\ m - 1.2 \cos\ \theta$

$h = 1.2\ m\ (\ 1\text{-} \cos\ \theta)$

$T = 2\ 200 \times 1.2\ (1\text{-} \cos 30º)$

$T = 353.7$ J

5. Una partícula de 3 kg baja 300 m por una rampa de pendiente 1 %, con rapidez constante de 36 km/h y luego sube 60 m por otra rampa de 2% de pendiente, hasta que se detiene. Calcule el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento durante todo el recorrido.



v_1 = 36 km/h = 10 m/s

v_2 = 0

h_1 = 300 sen (arctan 0.01) = 3 m

h_2 = 60 sen (arctan 0.02)= 1.2 m

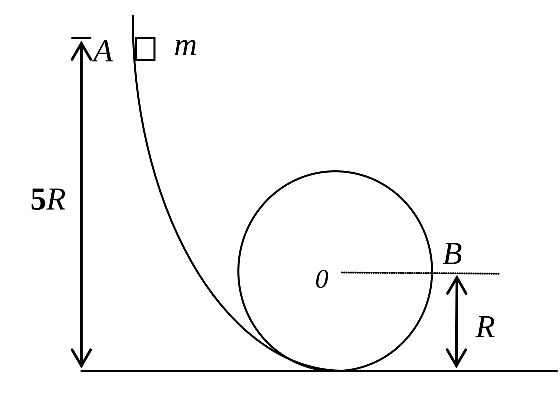
$W_{fr} = \Delta E_C + \Delta E_{pg} = -\frac{1}{2}\, 3 \times 10^2 + 3 \times 10\,(1.2 - 3)$

$W_{fr} = -204$ J

5.2 ENERGÍA MECÁNICA

6. Un cuerpo de masa *m* se suelta desde el punto *A* de la pista vertical lisa mostrada en la figura ¿Cuál es el vector aceleración del cuerpo en el punto *B*?

A



Si se considera las condiciones del problema se concluye que el sistema (cuerpo, pista, tierra) es un sistema conservativo de energía por lo que si los puntos *A* y *B* son considerados como inicial y final se tiene

$E_{MA} = E_{MB}$

De analizar las condiciones del cuerpo en los puntos A y B se concluye que en el cuerpo A sólo tiene energía potencial gravitacional y en B energía potencial gravitacional y cinética por lo que

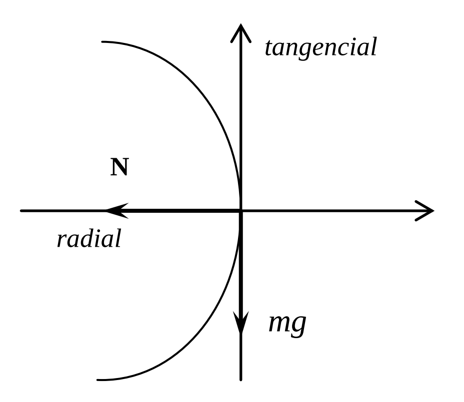
$$m\,g\,h_A = \tfrac{1}{2}\,m\,V_B^2 - m\,g\,h_B$$

$$m\,g\,5R = \tfrac{1}{2}\,m\,V_B^2 + m\,g\,R$$

$$V_B^2 = 2(5\,g\,R - g\,R)$$

$$V_B^2 = 8\,g\,R$$

Del análisis de las condiciones dinámicas del cuerpo en B se concluye:

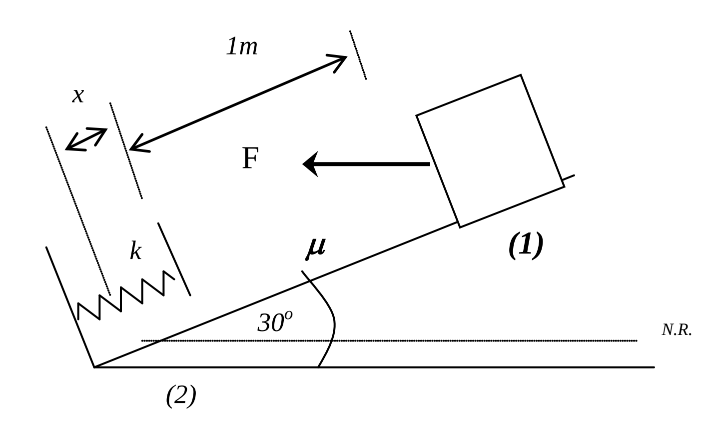


$$\Sigma F_c = N = m(V_B^2 / R) = 8 \cdot m \cdot g$$

$$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{N} + \mathbf{P} = -\,8 \cdot m \cdot g\,\mathbf{i} - m \cdot g\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{a} = \Sigma \mathbf{F}/m = -\,8 \cdot g\,\mathbf{i} - g\,\mathbf{j}$$

7. Un cuerpo de 10 kg se suelta desde el reposo y sobre el actúa una fuerza horizontal cuya magnitud es de 20 N, como se indica en la figura. El coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el plano es de $\mu = 0.2$. Calcule la velocidad del cuerpo cuando pasa por la posición en la cual el resorte se encuentra comprimido una distancia $x = 5$ cm, la constante del resorte es $k = 200$ N/m.



En el sistema de la figura existe una fuerza externa así como una disipación de energía mecánica en forma de calor debido a la fuerza de rozamiento por lo que se puede plantear la siguiente ecuación

$$\Sigma T_{EXT} = EM_2 - EM_1 + Q$$

Si se señala como nivel de referencia una línea horizontal que pase por el punto 2 se concluye que en 1 el sistema tiene energía potencial gravitacional y en 2 tiene energía cinética y energía potencial elástica.

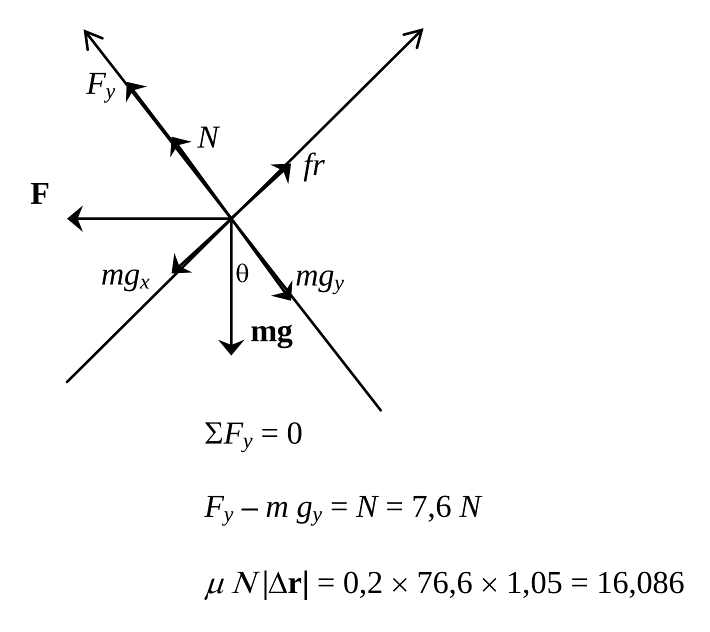
Dado a que la fuerza externa F es constante y el movimiento es rectilíneo se tiene que

$$\Sigma T_{FExt} = \mathbf{F} \bullet \Delta\mathbf{r} = 1.05 \times 20 \times cos30 = 18.187$$

El valor de Q es igual al valora del trabajo realizado por la fuerza de rozamiento esto es

$$Q = T_{froz} = \mathbf{fr} \bullet \Delta\mathbf{r} = \mu \cdot N \cdot |\Delta\mathbf{r}|$$

Del análisis dinámico de fuerzas del cuerpo en 1 se tiene



$$\Sigma F_y = 0$$

$$F_y - m\,g_y = N = 7,6\ N$$

$$\mu\ N|\Delta\mathbf{r}| = 0,2 \times 76,6 \times 1,05 = 16,086$$

Al aplicar la ecuación teniendo en cuenta las condiciones señaladas se tiene

$$\mathbf{F} \bullet \Delta\mathbf{r} = ½\ m\,v^2 + ½\ k\,x^2 - m\,g\,h + \mathbf{Fr} \bullet \Delta\mathbf{r}$$

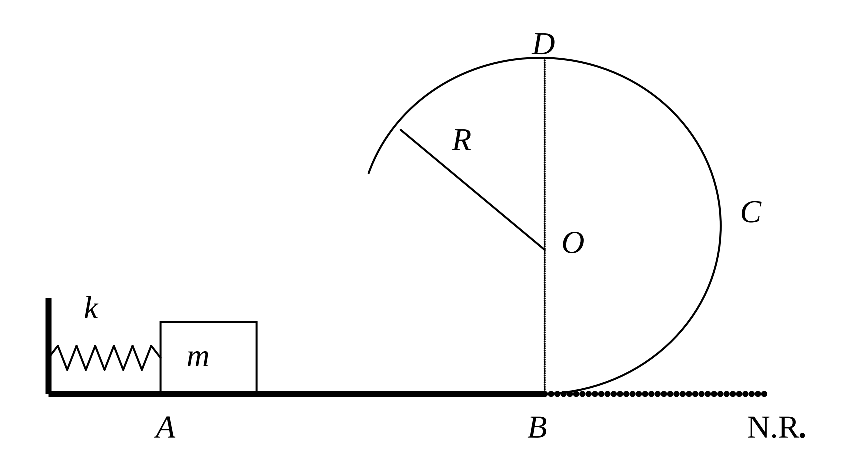
$$18.187 = ½\ 10\ v^2 + ½\ 200 \times 0,05^2 - 10 \times 10 \times 0,525 + 16,086$$

$$v = 3,30 \text{ m/s}$$

8. La pista de la figura es totalmente lisa. Si $AB = 10$ m, $R = 2$ m, $k = 100$ N/cm y $m = 1$ kg. Determine:

a) La mínima compresión del resorte en *A*, de modo que el bloque logre completar la trayectoria *A-B-C-D*.

b) Esta mínima compresión ¿depende de la distancia *AB*? Explique.



a) Dado que el sistema es conservativo en tanto no existe ni trabajo de fuerza externa al sistema ni disipación de energía mecánica y considerando los punto *A* y *D* como inicial y final se tiene que

$$E_A = E_B$$

$$E_A = ½ \cdot k \cdot x^2$$

$$E_D = m\,g\,h + ½\; m\,v_D^2$$

Como la condición es que el bloque logre completar la trayectoria, la velocidad del cuerpo en *D* es la velocidad crítica (esto es la velocidad requerida para que sumatorio de fuerzas radiales sea igual al peso).

$$v_D = \sqrt{R\,g}$$

$$½\,k\,x^2 = m\,g\,h + ½\,m\,R\,g$$

$$x^2 = (2\,m\,g\,h + m\,R\,g)/\,k \qquad \text{Ec. 1}$$

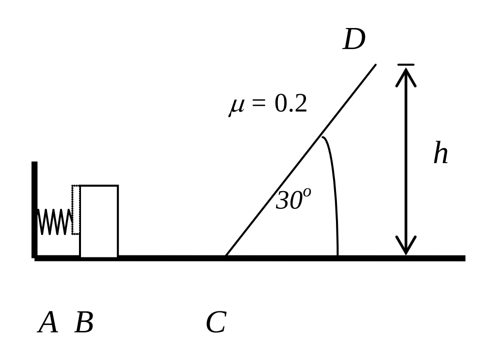
$$k = 100\ N/cm\ (100\ cm\,/\,1\ m) = 10000\ N/m$$

$$x^2 = (2 \times 1 \times 10 \times 4 + 1 \times 2 \times 10)/10000$$

$$x = 0.1 \text{ m}$$

b) La compresión mínima no depende de la distancia *AB* pues esta no es variable de la Ec.1.

9. En la figura, el tramo *A*-*B*-*C* es liso, mientras que el tramo *C*-*D* es rugoso. El resorte se encuentra comprimido 10 cm y luego se le suelta. Si m = 2 kg y k = 30 N/cm, determine:
a) La velocidad del cuerpo en *C*.
b) La altura h a la que llegará el cuerpo.



a) Para este literal el sistema es conservativo por lo que las energías mecánicas en *C* y *B* son iguales.

$$E_{MC} = E_{MB}$$

Si el nivel de referencia es la línea *ABC* en *C* existe sólo energía cinética y en *B* sólo energía elástica por lo que

$$\frac{1}{2}\, m\, v_c^2 = \frac{1}{2}\, k\, x^2$$

$$\frac{1}{2}\;\; 2\;\; v_c^2 = \frac{1}{2}\;\; 3000\, (0.1)^2$$

$$V_C = 3.87 \text{ m/s}$$

b) En este literal el sistema no es conservativo en tanto existe disipación de energía mecánica en forma de calor por lo que considerando como nivel de referencia la línea horizontal *ABC* y *E* el punto de mayor altura a que llega el cuerpo se tiene:

$$0 = E_{CE} - E_{CC} + E_{pgE} - E_{pgC} + Q$$

$$0 = -1/2\, m\, v_C^2 + m\, g\, h_E - T_{fr}$$

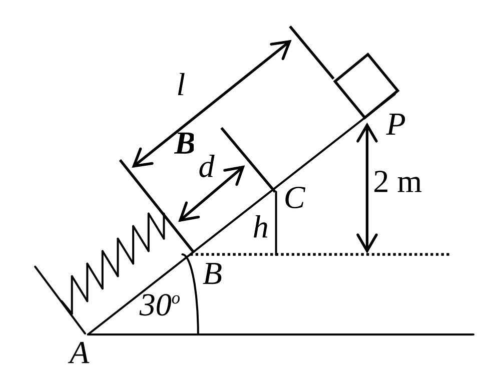
$$0 = -\frac{1}{2}\, m\, v_C^2 + m\, g\, h_E - \mu\, m\, g\, cos 30^o\, CE\, \cos 180^o$$

$$0 = -\frac{1}{2}\, v_C^2 + g\, h_E + \mu\, g\, \cos 30^o (h_E / \text{sen} 30^o)$$

$$0 = -7.5 + 10\, h_E + 3.464\, h_E$$

$$h_E = 0.557\, m$$

10. Un bloque de 3 kg parte del reposo desde un punto P de un plano inclinado como se muestra en la figura. En la parte inferior del plano hay un resorte con una constante de elástica $k = 10^4$ N/m. El coeficiente de fricción entre el plano y el bloque entre los puntos *P* y *B* es de 0.3 y entre los puntos *A* y *B* es cero. Encuentre la altura a la cual sube el bloque después de rebotar en el resorte por primera vez.



De considerar que en el sistema no existe fuerza externa la misma que realice trabajo y existe disipación de energía mecánica en forma de calor, la ecuación general trabajo-energía para esta caso entre los punto *P* y *C* se expresa como sigue

$$0 = E_{MC} - E_{MP} + Q_{PBC}$$

Si el nivel de referencia se encuentra en una línea horizontal que pase por *B* se tiene que:

$$0 = m \cdot g \cdot h_C - m \cdot g \cdot h_P + Q_{PBC} \qquad \text{(Ec.1)}$$

$$Q_{PBC} = -T_{fr} = \mathbf{fr} \bullet \Delta\mathbf{r}$$

$$fr = \mu N$$

$$N = m\, g \cos\theta$$

$$fr = \mu\ m\, g \cos\theta$$

$$|\Delta\mathbf{r}| = l + d$$

$$l = 2\ m / sen30 = 4 \text{ m}$$

$$Q_{PBC} = -T_{fr} = \mu\ m\, g \cos\theta\ (4 + d)$$

Reemplazando en la Ec. 1

$$0 = m\, g\, h_C - m\, g\, h_P + \mu\ m\, g \cos\theta\ (4 + d)$$

$$0 = h_C - h_p + \mu\ \cos\theta (4 + d)$$

$$0 = d\ \text{sen}\theta - h_P + \mu\ \cos\theta (4 + d)$$

$$d\ \text{sen}\theta = h_P - 4\ \mu\ \cos\theta\ - \mu\ \cos\theta\ d$$

$d\,sen\theta + \mu\ \cos\theta\ d = h_P - 4\ \mu\ \cos\theta$

$d = (-\,4\ \mu \cos\theta + h_p) / (\text{sen}\theta + \mu \cos\theta)$

$d = (-\,4 \times 0.3 \times 0.866 + 2) / (0.5 + 0.3 \times 0.866)$

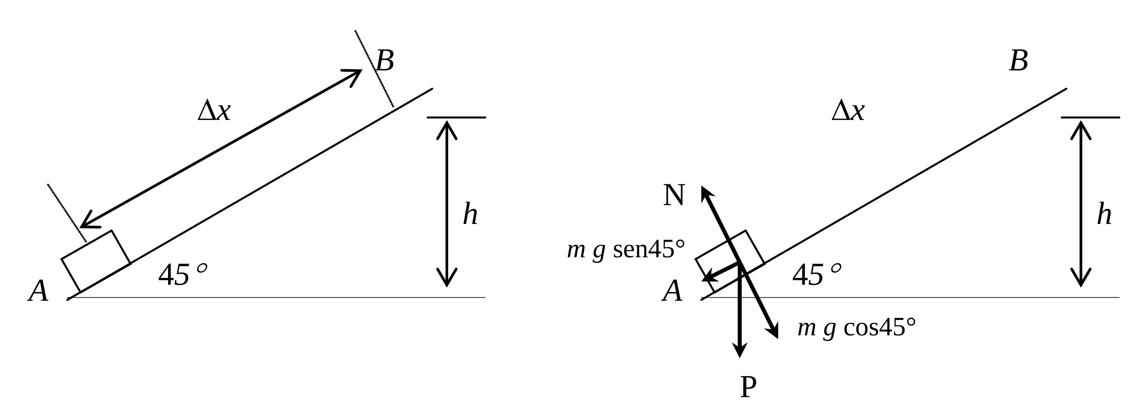
$d = 1.26$

$h = 1.26\ \ \text{sen}30$

$h = 0.63\text{m}$

5.3 ECUACIÓN TRABAJO - ENERGÍA

11. Desde la parte más baja, *A*, de un plano inclinado, sube un bloque hasta detenerse en *B*. Si la energía mecánica total del bloque en *A* y en *B* es de 100 J y 70 J, respectivamente, determine el coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano.



De las condiciones del problema tenemos:

$E_{MA} = E_{MB} + \ Q$

$Q = E_{MA}\ - E_{MB} = 100\text{ J} - 70\text{ J} = \ 30\text{ J}$

Analizando el diagrama de cuerpo libre del bloque tenemos:

$N = m\,g \cos 45°$

$F\text{r} = \mu\,\boldsymbol{N} = \mu\,m\,g \cos 45°$

Además y remplazando:

$Q = f_r \Delta x = \mu mg \cos 45° \Delta x;$

En la figura: sen 45° = $h / \Delta x$, despejando Δx y remplazando tenemos:

$Q = \mu mg \cos 45° (h/\text{sen } 45°) = \mu mg\, h/\tan 45°,$

Pero

$m g h = E_{pgB}$

$Q = \mu E_{pgB} /\tan 45°$

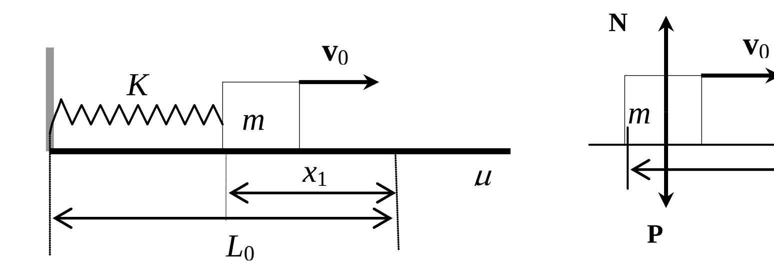
Remplazando valores nos queda:

$30 \text{ J} = \mu\, 70 \text{ J} / \tan 45°,$

Y despejando tenemos que:

$\mu = 3/7.$

12. En la posición mostrada en la figura, el resorte de constante elástica k = 200 N/m está comprimido x_1 = 1 m. El coeficiente de fricción es μ = 0.5 y la masa m = 10 kg. El cuerpo de masa m tiene una rapidez inicial v_o = 10 m/s hacia la derecha. ¿Qué distancia recorre el cuerpo hasta detenerse?



Analizando la relación general trabajo – energía:

$\sum T_{ext} = \Delta E_c + \Delta E_{pg} + \Delta E_{pe} + Q;$

que se puede escribir de la siguiente forma:

$\sum T_{ext} = E_{cf} - E_{c0} + E_{pgf} - E_{pg0} + E_{pef} - E_{pe0} + Q$

Y aplicando las condiciones del problema tenemos:

$0 = - E_{c0} - E_{pe0} + Q.$

Despejando tenemos que:

$Q = E_{c0} + E_{pe0}$.

Del diagrama de cuerpo libre del bloque de masa *m* tenemos que:

$N = P = mg$

Recordando que *Q* es la energía que se disipa debido al trabajo realizado por la fuerza de rozamiento y remplazando tenemos:

$\mu N \Delta x = ½\ m v_0^2 + ½\ k x_1^2$

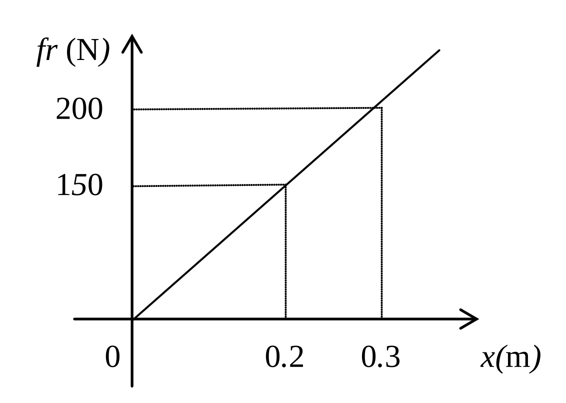
$\mu mg \Delta x = ½\ m v_0^2 + ½\ k x_1^2$

Despejando Δx, remplazando valores y simplificando tenemos:

$\Delta x = (\ ½ \times 10 \times 102 + ½\ 200 \times 1) / 0.5 \times 10 \times 10$ m

$\Delta x = 12$ m.

13. Un cuerpo de 1 kg que se suelta desde una altura *H*, cae en tierra floja y penetra 0.3 m hasta detenerse. La magnitud de la fuerza de resistencia (*fr*) que ejerce la tierra contra el cuerpo, aumenta según el gráfico que se indica. Calcule:
a) la altura *H* desde la que se soltó el cuerpo.
b) la velocidad del cuerpo cuando ha penetrado 0.2 m.



a) Analizando la relación general trabajo – energía:

$\sum T_{ext} = \Delta E_c + \Delta E_{pg} + \Delta E_{pe} + Q;$

que se puede escribir de la siguiente forma:

$\sum T_{ext} = E_{cf} - E_{c0} + E_{pgf} - E_{pg0} + E_{pef} - E_{pe0} + Q;$

Con ayuda de la figura a) y aplicando las condiciones del problema en los puntos 1 y 2 tenemos:

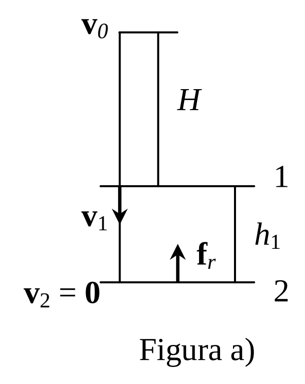


Figura a)

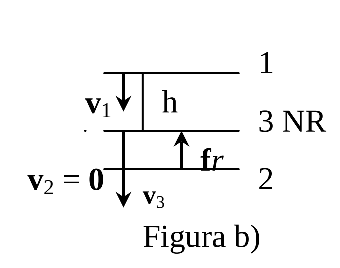


Figura b)

$$0 = - E_{c1} - E_{pg1} + Q.$$

Despejando tenemos que:

$$Q = E_{c1} + E_{pg1} = ½\, m\, v_1^2 + m\, g\, h_1.$$

Además:

$$Q = ½\ 200 \times 0.3 \text{ J} = \text{área bajo la curva } f_r \text{ contra } x = 30 \text{ J}$$

$$v_1^2 = v_0^2 + 2 \text{ g H}$$

Pero como $v_0^2 = 0$ tenemos:

$$v_1^2 = 2 \text{ g H}$$

Remplazando tenemos:

$$30 \text{ J} = ½\ 1 \text{ kg. } 2 \times 10 \text{ m/s}^2 \text{ H} + 1 \text{ kg.} \times 10 \text{ m/s}^2 \times 0.3 \text{ m.}$$

Despejando y simplificando tenemos que:

$$\text{H} = 2.7 \text{ m}$$

Además

$$v_1^2 = 2 \text{ g H}$$

Remplazando H = 2.7 m tenemos que:

$$v_1^2 = 54 \text{ m}^2/\text{s}^2.$$

b) Analizando la relación general trabajo – energía:

$$\sum T_{ext} = \Delta E_c + \Delta E_{pg} + \Delta E_{pe} + Q$$

$$\sum T_{ext} = E_{cf} - E_{c0} + E_{pgf} - E_{pg0} + E_{pef} - E_{pe0} + Q$$

Con ayuda de la Figura b) y aplicando las condiciones del problema en los puntos 1 y 3 tenemos:

$$0 = - E_{c3} - E_{c1} - E_{pg1} + Q$$

$$0 = ½\, m\, v_3^2 + ½\, m\, v_1^2 - mg\, h_1 + Q.$$

Remplazando valores tenemos:

$$0 = ½\ 1\ \text{kg.}\ v_3^2 - ½\ 1\ \text{kg.}\ 54\ \text{m}^2/\text{s}^2 - 1\ \text{kg.}\ 10\ \text{m/s}^2\ 0.2\ \text{m} + ½\ 150\ \text{N}\ 0.2\ \text{m.}$$

Despejando y simplificando tenemos que:

$$v_3 = 5.29\ \text{m/s}$$

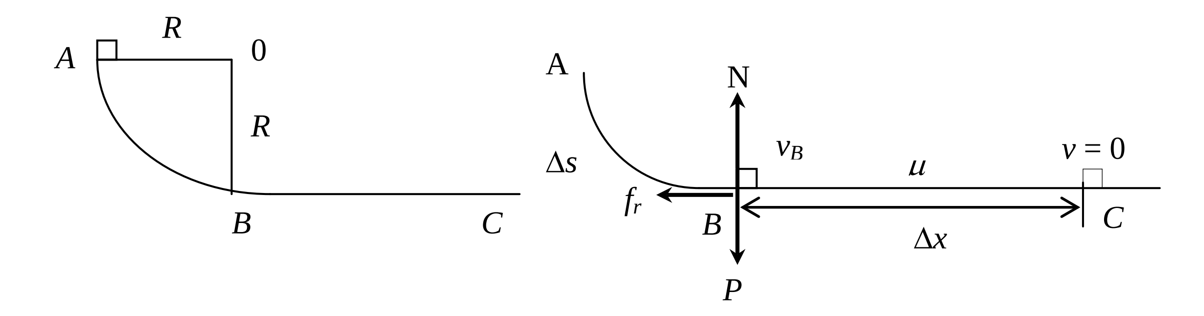
14. Un bloque de 1 kg. se suelta en el punto *A* de una pista, construida con un cuadrante de circunferencia de radio 1.5 m. El cuerpo recorre la pista y pasa por *B* con una rapidez de 3.6 m/s. A partir del punto *B* se desplaza sobre una superficie horizontal una distancia de 2.7 m hasta detenerse en C. Determine:

a) el coeficiente de rozamiento entre el bloque y la superficie horizontal.

b) el trabajo realizado para vencer la fuerza de rozamiento, cuando el cuerpo se deslizó de *A* a *B*.

c) la fuerza de rozamiento media en el tramo *AB*.

d) la constante elástica de un resorte para que al ser colocado en *B* se comprima 10 cm.



a) Analizando la relación general trabajo – energía:

$$\sum T_{ext} = \Delta E_c + \Delta E_{pg} + \Delta E_{pe} + Q$$

Para los puntos *B* y *C* tenemos:

$$0 = - E_{cB} + Q$$

$$Q = E_{cB},$$

Recordando que *Q* es la energía que se disipa por el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento y remplazando tenemos:

$\mu N \Delta x = ½ \; m v_B^2$

$\mu mg \Delta x = ½ \; m v_B^2$

Despejando, y remplazando valores tenemos que:

$\mu = v_B^2 / 2 \text{ g } \Delta x$

$\mu = 3.6^2 \text{ m}^2/\text{s}^2 / 2 \times 10 \text{ m/s}^2 \times 2.7 \text{ m}$

$\mu = 0.24 \text{ m}$

b) Analizando la relación general trabajo – energía:

$\sum T_{ext} = \Delta E_c + \Delta E_{pg} + \Delta E_{pe} + Q$

Para los puntos A y B tenemos:

$Q = E_{pgA} - E_{cB},$

$Q = mg R - ½ \, m v_B^2$

Remplazando valores tenemos que:

$Q = 1 \text{ kg} \times 10 \text{ m/s}^2 \times 1.5 \text{ m} - ½ \text{ kg} \times 3.6^2 \text{ m}^2/\text{s}^2$

$Q = 8.52 \text{ J}$

c) Conocemos que:

$Q = f_r \Delta s,$
$f_r = Q / \Delta s$

Reemplazando valores y simplificando tenemos que:

$f_r = 8.52 \text{ J} \times 4 / 2 \pi \times 1.5 \text{ m}$

$f_r = 3.62 \text{ N}$

d) Analizando la relación general trabajo – energía:

$\sum Text = \Delta E_c + \Delta E_{pg} + \Delta E_{pe} + Q$

$0 = - E_{cB} + E_{pe} + Q = - ½ \, m v_B^2 + ½ \, k x^2 + \mu N \Delta x$

Remplazando valores tenemos:

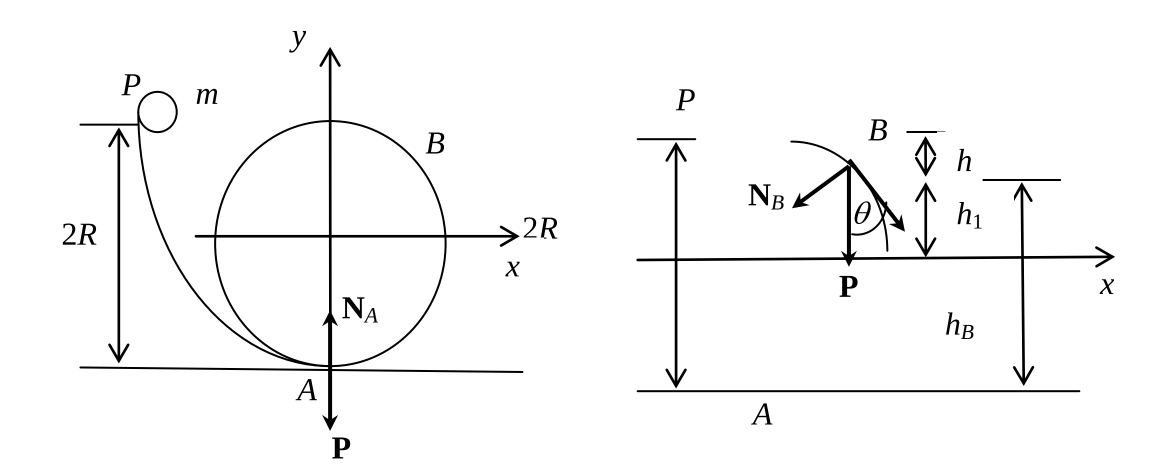
$0 = - ½ \; 1 \text{ kg}.3.6^2 \text{ m}^2/\text{s}^2 + ½ \, k \, 0.1^2 \text{ m}^2 + 0.24 \times 1 \text{ kg}. \; 10 \text{ m/s}^2 \; 0.1 \text{ m}.$

Despejando y simplificando tenemos que:

$k = 2$ (½ x 3.6 – 0.24) N/m / 10^{-2}

$k = 1.25$ N/m

15. Un cuerpo de masa m se suelta, desde el reposo, del punto P de la pista sin rozamiento de la figura. Determine:
a) la normal en el punto A.
b) la posición del punto donde el cuerpo se separa de la pista, con respecto al sistema de referencia indicado.



a) Haciendo diagrama de fuerzas en el punto A tenemos:

$N_A - P = m\, v_A^2/R$

$N_A = mg + m\, v_A^2/R$

Además:

$v_A^2 = v_P^2 + 2\, g\, (2R)$

$v_P = 0$

$v_A = 4\, g\, R$

Entonces:

$N_A = mg + m\, 4\, g\, R\, /\, R$

$N_A = 5\, mg$

b) Haciendo diagrama de fuerzas en el punto B tenemos:

$N_B + P \text{ sen } \theta = m\, v_B^2/R,$

Pero $N_B = 0$, entonces:

$$mg \text{ sen } \theta = m\, v_B^2/R$$
$$v_B^2 = g\, R \text{ sen } \theta$$

Analizando la relación general trabajo-energía:

$$\sum T_{ext} = \Delta E_c + \Delta E_{pg} + \Delta E_{pe} + Q$$

Para los puntos P y B tenemos:

$$E_{cB} = E_{pgP}$$

$$½\, m\, v_B^2 = m\, g\, h$$

$$½\, v_B^2 = g\, h;$$

Pero $h = (2R - h_B)$, y

$$h_B = (R + h_1),$$

$$h = [2R - (R + h_1)]$$

Remplazando valores tenemos que:

$$½\, v_B^2 = g\, [2R - (R + h_1)]$$

Además

$$h_1 = R \text{ sen } \theta$$

Entonces:

$$½\, v_B^2 = g\, (2R - R - R \text{ sen } \theta)$$

$$½\, g\, R \text{ sen } \theta = g\, (R - R \text{ sen } \theta)$$

$$½ \text{ sen } \theta = (1 - \text{sen } \theta)$$

$$\text{sen } \theta = 2/3$$

$$\theta = \text{sen}^{-1}\, 2/3$$

$$\theta = 41.81°$$

5.4 FUERZAS CENTRALES

16. Un átomo de hidrógeno consta de un núcleo positivo y un electrón negativo, cada uno de 1.6×10^{-19}C de carga, a una distancia de 5×10^{-11}m uno de otro. Determine:
a) la magnitud de la fuerza eléctrica entre el protón y el electrón,
b) la frecuencia con la que el electrón orbita en torno al protón.

Solución.

La magnitud de la fuerza eléctrica entre dos cargas eléctricas puntuales es

a) $F = k\dfrac{q_1\,q_2}{r^2}$, así

$$F = (9\times10^9)\,\frac{\left(1.6\times10^{19}\right)\left(1.6\times10^{19}\right)}{\left(5\times10^{-11}\right)^2}$$

$$F = 9.2\times10^{-8}\,N$$

b) $F = ma_c = m\,w^2 r$

$$w = \sqrt{\frac{F}{m\ \ r}}$$

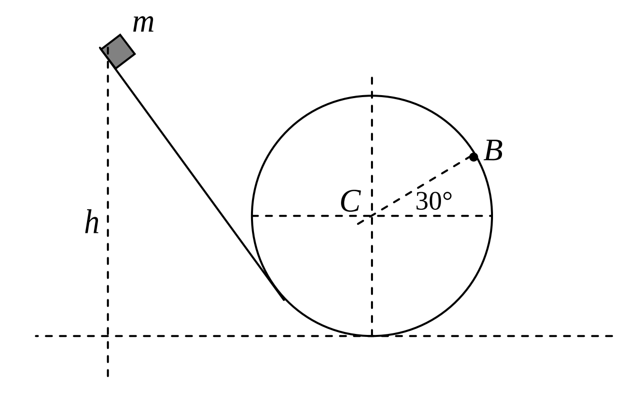
$$w = \sqrt{\frac{9.2\times10^{-8}}{\left(9.1\times10^{-31}\right)\left(5\times10^{-11}\right)}}$$

$$w = 4.5\times10^{16}\ \text{rad/s}$$

$$f = w/2\pi$$

$$f = 7.16\times10^{15}\,\text{rev/s}$$

17. Desde una altura *h*, con respecto a la base de un rizo vertical, sin fricción y de radio *r* = 1 m, se suelta un cuerpo de masa *m* = 2 kg. Determine en el punto *B*, la fuerza total que actúa sobre el cuerpo dirigida hacia el centro *C* del rizo.



Solución.

$$F_{radial} = f_c + w_{radial}$$

$$= \; m\frac{v^2}{r} + m\,g\,sen 30^\circ$$

Se puede encontrar la rapidez en términos h, r, θ

$$m\,g\,h = m\,g\,(r + r\,sen\theta) + \frac{1}{2}m\,v^2$$

$$g\,h = g\,r\left(1 + sen\theta)\right) + \frac{v^2}{2}$$

$$F_{radial} = \frac{2m}{r}(g\,h - g\,r\,(1 + sen\theta)) + m\,g\,sen 30^\circ$$

= 2(2) (10 (4) – 10(1)(1+0.5)) + 2 (10) (0.5)

= 100 + 10

= 110 N

18. La carga eléctrica puntual q_A = - 1 μ C, orbita uniformemente en torno a la carga q_B = 3 μ C, a una distancia r_1 = 50cm. Determine:
a). El trabajo para acercar la carga q_A , a la distancia r_2 = 5cm de la carga q_B.
b). La relación de frecuencia de q_A en torno a q_B, cuando $\mathbf{q}_A$ salta a la órbita de radio r_2.

Solución.

a). El trabajo para trasladar una carga q_A desde un punto distanciado r_1 de la carga q_B hasta la distancia de r_2 respecto a q_B, esta dado por.

$$T = \left(k\frac{q_A\,q_B}{r_1} \; - \; k\frac{q_A\,q_B}{r_2} \right)$$

$$T = k\,q_A\,q_B\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

= $(9\times10^9)(- 1\times10^{-6})\,(3\times10^{-6})$ (1/0.5 - 1/ 0.05)

= $- 27\times10^{-3}$ (-18)

= 0.486 J

b). $F_{centrípeta} = F_{eléctrica}$

$$m\frac{v^2}{r}=k\frac{q_1\,q_2}{r^2}$$

$$v_1^{\,2}=\frac{k\,q_A\,q_B}{m_1 r_1} \quad ; \quad v_2^{\,2}=\frac{k\,q_A\,q_B}{m_1 r_2}$$

Si la masa m_1 se mueve por una circunferencia de radio r_1 con rapidez v_1, su frecuencia esta dada por

$$f=\frac{v_1}{2\pi\, r_1}$$

$$\frac{v_1^{\,2}}{4\pi^2 r^2}\;4\pi^2 r^2=\frac{k\,q_A\,q_B}{m_1\,r_A}$$

$$f^2=\frac{k\,q_1\,q_2}{4\pi^2 m\;r_1^{\,2}}$$, así

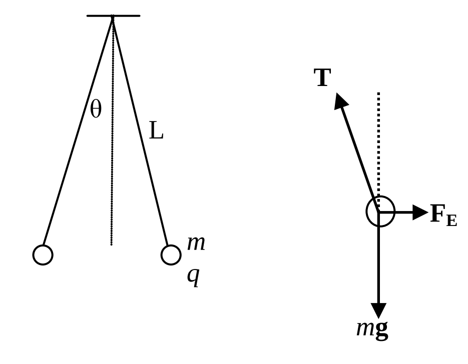
$$\left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2=\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3$$, de donde

$$\frac{f_2}{f_1}=\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{3/2}$$

$$\frac{f_2}{f_1}=\left(\frac{0.5}{0.05}\right)^{3/2}$$

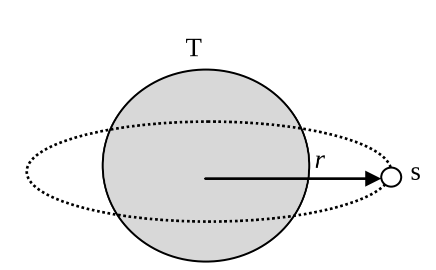
$$\frac{f_2}{f_1}=31.62$$

19. Dos esferas idénticas de masa *m* y carga 0,2 μC cada una, están suspendidas como indica la figura. Si L = 0,6 m y θ = 5˚, determine la masa *m*.



T senθ – F_E = 0
T senθ = $Kq^2/(2a)^2$
T cosθ – mg = 0
mg senθ/cosθ = $Kq^2/(2a)^2$
a = L senθ
$m = Kq^2 \cos\theta / \, g\, 4L^2 \,\mathrm{sen}^3\theta$
m = 37,6 g

20. Se coloca en órbita un satélite geoestacionario sobre el Ecuador, a una altura de 100 km. Si el radio medio de la Tierra es 6400 km y su masa $5{,}98\times10^{24}$ kg, determine la rapidez orbital del satélite.



$F_G = G\, M_T\, m_s/r^2$
$F_G = 6{,}67\times10^{-11}.\ 5{,}98\times10^{24}.\ m_s/(6{,}55\times10^6)^2$
$F_G = 9{,}297.\ m_s$ N
$\mathbf{F_G} = m_s\, \mathbf{a_c}$
$a_c = 9{,}297$ m/s^2 $\rightarrow$ $a_c = v^2/r$
$v = 7803{,}54$ m/s

5.5 POTENCIAL Y DIFERENCIA DE POTENCIAL

21. ¿A través de que diferencia de potencial se necesitaría acelerar un electrón para alcanzar una velocidad del 60% de la velocidad de la luz a partir del reposo? $c = 3\times10^8$ m/s.

Para la resolución de este ejercicio no consideraremos el efecto relativista del electrón.

Sabemos que $\Delta Ep_E = q\Delta V$.

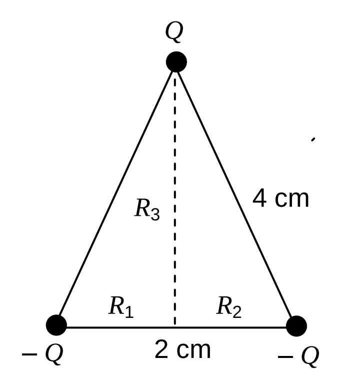
$\Delta Ep_E = \frac{1}{2}mv^2 = q\Delta V$, en donde

$$\Delta V = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{q}$$

$$\Delta V = \frac{\frac{1}{2}(9.1\times10^{-31}\text{ kg})}{1.6\times10^{-19}\text{ C}}\left[0.6\times3\times10^{8}\text{ m/s}\right]^2$$

$\Delta V = 92137.5$ V

22. Tres cargas puntuales están ubicadas en los vértices de un triángulo isósceles, como se muestra en la figura. Calcule el potencial eléctrico en el punto medio de la base. Considere el valor de $Q = 5$ μC.



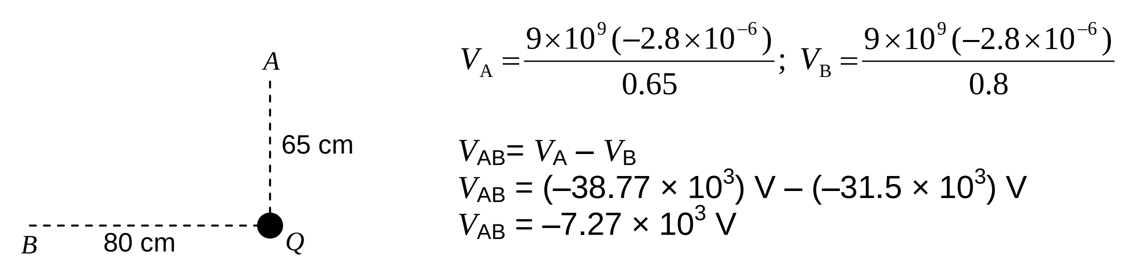
$R_1 = R_2 = 1$ cm; $R_3 = \sqrt{16-1} = \sqrt{15}$ cm

$$V = \frac{K(-Q)}{R_1} + \frac{K(-Q)}{R_2} + \frac{K(Q)}{R_3}$$; como $R_1 = R_2$, tenemos:

$$V = KQ\left(\frac{1}{R_3} - \frac{2}{R_1}\right) = (9\times10^9)(5\times10^{-6})\left(\frac{1}{\sqrt{15}} - 2\right)\frac{1}{10^{-2}}$$

$V = -7.84\times10^6$ V

23. Un punto *A* se encuentra a 65 cm al norte de una carga puntual Q = –2.8 µC y un punto *B* a 80 cm al oeste de dicha carga, como se indica en la figura. Calcule V_{AB}.



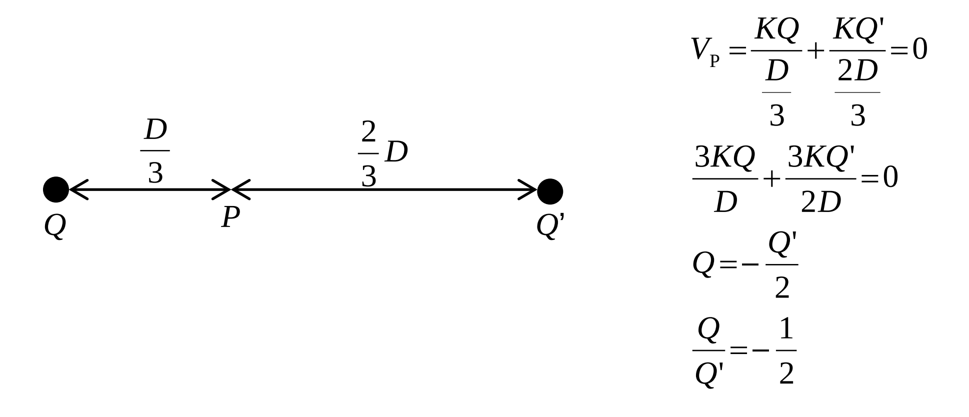
$$V_A = \frac{9\times10^9(-2.8\times10^{-6})}{0.65};\ V_B = \frac{9\times10^9(-2.8\times10^{-6})}{0.8}$$

$V_{AB} = V_A - V_B$

$V_{AB} = (-38.77 \times 10^3)\ \text{V} - (-31.5 \times 10^3)\ \text{V}$

$V_{AB} = -7.27 \times 10^3\ \text{V}$

24. La separación entre dos cargas puntuales *Q* y *Q'* es D. En un punto *P* entre las cargas y a una distancia *D*/3 de la carga *Q* el potencial es cero. Calcule la relación *Q/Q'*.



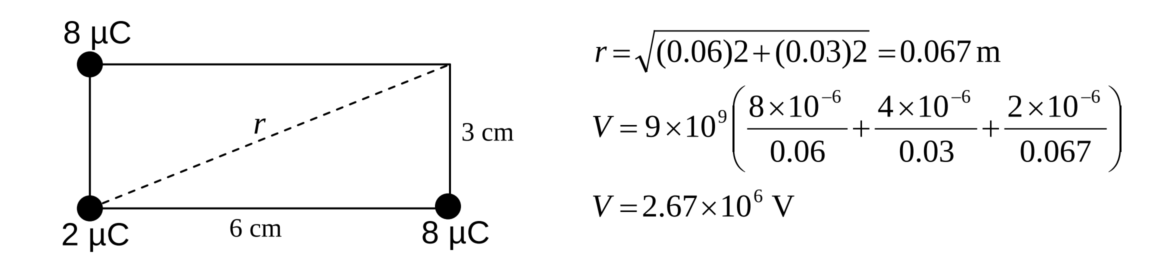
$$V_P = \frac{KQ}{\frac{D}{3}} + \frac{KQ'}{\frac{2D}{3}} = 0$$

$$\frac{3KQ}{D} + \frac{3KQ'}{2D} = 0$$

$$Q = -\frac{Q'}{2}$$

$$\frac{Q}{Q'} = -\frac{1}{2}$$

25. Determine el potencial eléctrico en el vértice superior derecho del rectángulo de la figura.



$$r = \sqrt{(0.06)2 + (0.03)2} = 0.067\,\text{m}$$

$$V = 9\times10^9\left(\frac{8\times10^{-6}}{0.06} + \frac{4\times10^{-6}}{0.03} + \frac{2\times10^{-6}}{0.067}\right)$$

$$V = 2.67\times10^6\ \text{V}$$

CAPÍTULO 6

COLISIONES

CAPÍTULO 6

COLISIONES

En los capítulos anteriores vimos las Leyes de Conservación de la Energía, de la Cantidad de Movimiento Lineal y de la Cantidad de Movimiento Angular que son herramientas sumamente útiles, no solo para resolver una gran cantidad de problemas, que de otra forma resultarían muy complicados, sino que permiten generalizar una gran cantidad de fenómenos aparentemente inconexos.

En este capítulo vamos a estudiar los choques o colisiones, como un excelente ejemplo de aplicación de las leyes de conservación que hemos estudiado hasta ahora.

6.1 DESCRIPCIÓN DE LAS COLISIONES

Se comenzará analizando la colisión más simple que corresponde a la de 2 pequeñas esferas macizas (2 bolas de billar) por ejemplo. Como la fuerza gravitacional entre ellas es insignificante no la vamos a considerar, por lo que no va existir ninguna fuerza entre ellas a medida que se van aproximando (Fig. 6–1*a*) hasta llegar a ponerse en contacto (Fig. 6–1*b*). A partir de este instante, las esferas empiezan a deformarse debido a las fuerzas de contacto que se ejercen entre sí, de acuerdo con la tercera ley de Newton.

Estas fuerzas de contacto van aumentando a medida que aumenta la deformación, hasta que llegan a un valor máximo cuando la velocidad relativa es cero (Fig. 6–1*c*). Después de haber llegado hasta este punto de máxima deformación, las fuerzas repulsivas de contacto les obligan a separarse, de tal manera que empiezan a disminuir su intensidad, disminuyendo al mismo tiempo la deformación hasta que están a punto de separarse, instante en el cual las fuerzas de contacto se hacen cero (Fig. 6–1*d*).

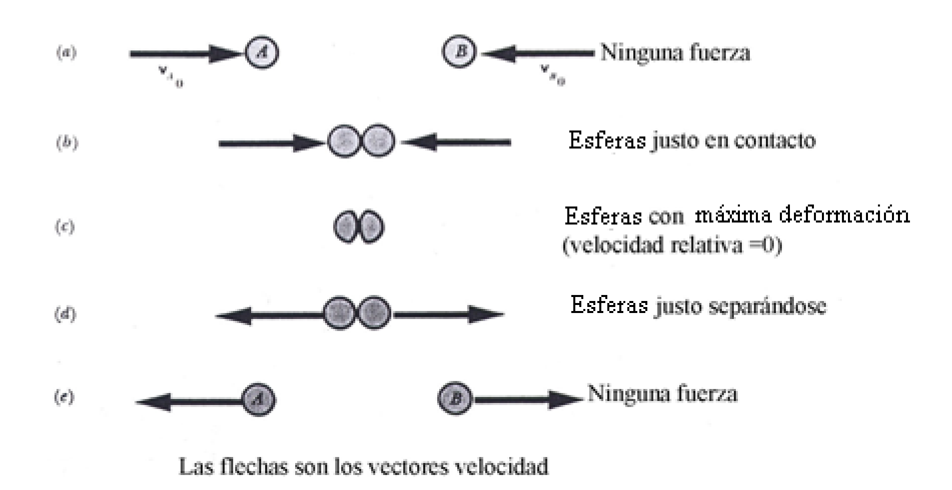


Figura 6–1 Colisión frontal de dos pequeñas esferas

Si se supone que antes de la colisión las esferas se movían por una superficie horizontal lisa (sin fricción), entonces las podemos considerar como un sistema aislado, lo que significa que no hay intercambio de ninguna clase de energía entre las esferas y el medio exterior.

Como las esferas se mueven por una superficie horizontal lisa con velocidad constante, su energía cinética no cambia y su energía potencial gravitacional tampoco. Sin embargo, una vez que entran en contacto la energía cinética disminuye porque hay un reordenamiento de las moléculas de las esferas, lo que implica un trabajo realizado en contra de las fuerzas eléctricas internas, ya que al producirse la deformación hay un desplazamiento de las moléculas de sus posiciones de equilibrio, y este trabajo se almacena en forma de energía potencial eléctrica. En el instante de la máxima deformación entonces la energía cinética es mínima y la energía potencial es máxima. Al disminuir la deformación en cambio ocurre lo contrario, la energía potencial eléctrica disminuye y empieza a aumentar la energía cinética; finalmente, si no se mantiene la deformación, toda la energía potencial eléctrica se convierte en energía cinética.

Por lo tanto, se cumple el principio de conservación de la energía, ya que, como hemos visto, durante la colisión la energía cinética se transforma en energía potencial eléctrica y luego ésta se vuelve a transformar en energía cinética.

Colisiones elástica e inelástica

Un criterio para clasificar las colisiones es el que tiene que ver con el hecho de si la energía cinética final es igual o no a la energía cinética inicial. Que no se confunda esto con el hecho de que en ausencia de fuerzas externas la energía total siempre se conserva. De acuerdo con este criterio, las colisiones se clasifican en:

Elásticas

Cuando la energía cinética final del sistema es igual a la energía cinética inicial del mismo, lo que significa que no hay una conversión permanente de energía cinética en energía potencial interna de los cuerpos. Un ejemplo de este tipo de colisión es la que experimentan 2 bolas de billar o de acero, porque las deformaciones permanentes que se producen en ellas son insignificantes. Este tipo de colisiones también se producen a nivel microscópico entre las moléculas de un gas a temperatura ambiente.

Inelásticas

Cuando la energía cinética final del sistema es menor que la energía cinética inicial del mismo. Un ejemplo de este tipo de colisiones es la que se produce entre 2 bolas de plastilina o también entre las moléculas de un gas a altas temperaturas, ya que parte de la energía cinética se transforma en energía interna de las moléculas.

Colisiones sin contacto

Para hablar de una colisión no es necesario que exista contacto real entre 2 cuerpos. Suponga dos partículas igualmente cargadas (por ejemplo 2 electrones) que son lanzadas una hacia la otra a lo largo de la recta que las une (Fig. 6–2*a*). A medida que se acercan la energía cinética disminuye, debido a la fuerza eléctrica repulsiva que existe entre ellas, convirtiéndose en energía potencial eléctrica. Aplicando el principio de conservación de la energía al sistema, considerando que inicialmente se encontraban a una distancia sumamente grande, se tiene:

$$(\tfrac{1}{2} m_A v_A^2)_{\text{inicial}} + (\tfrac{1}{2} m_B v_B^2)_{\text{inicial}} = k\,\frac{q_A\, q_B}{R} \qquad (6\text{–}1)$$

siendo R la distancia de mayor acercamiento. Después de llegar al punto de mayor acercamiento (Fig. 6–2*c*), las partículas invierten su velocidad, de tal manera que su módulo empieza a aumentar a medida que la energía potencial eléctrica se convierte de nuevo en energía cinética (Fig. 6–2*d*).

Es importante hacer notar que en esta clase de colisión está involucrada una fuerza de gran alcance, por lo que este tipo de colisión no se produce en un intervalo de tiempo muy pequeñito, sino que se extiende en el tiempo hasta una distancia considerable.

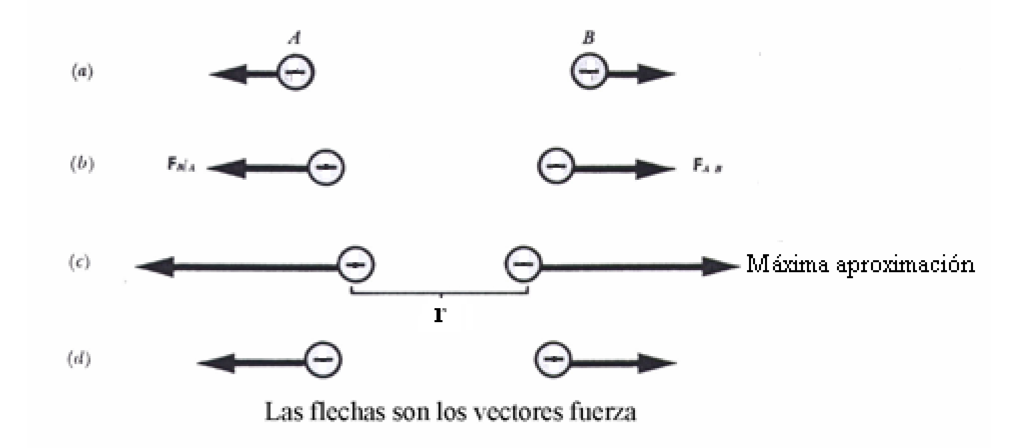


Figura 6–2 Colisión frontal sin contacto directo

Otro caso más complicado pero más frecuente es el que se produce cuando los cuerpos no se mueven a lo largo de la misma línea recta, por lo que la colisión ya no es frontal (Fig. 6–3). Aquí también se tiene una conversión de energía cinética en energía potencial y luego de energía potencial nuevamente a energía cinética, pero las partículas nunca llegan al reposo.

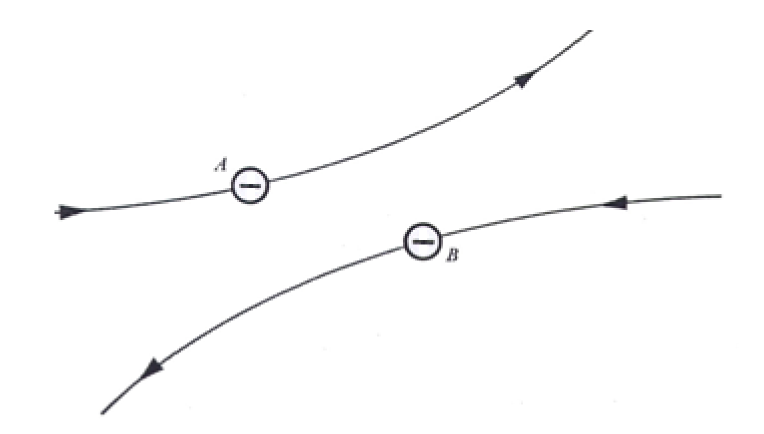


Figura 6–3 Colisión no frontal, bajo la acción de una fuerza repulsiva

También se pueden dar este tipo de colisiones entre cuerpos que se atraen como el caso de la Tierra y el cometa Halley que pasó cerca de la Tierra hace algunos años (Fig. 6–4).

En este caso también se produce conversión de energía potencial gravitacional en energía cinética cuando el cometa se acerca a la Tierra y luego conversión de energía cinética en potencial gravitacional cuando el cometa se aleja.

Por facilidad vamos a profundizar en las colisiones frontales, teniendo presente que todos los principios se aplican también a las colisiones no frontales.

De lo que se ha visto hasta aquí, se puede concluir que toda colisión se caracteriza por las interconversiones de energía cinética y energía potencial, con cambios en las direcciones del movimiento de las partículas.

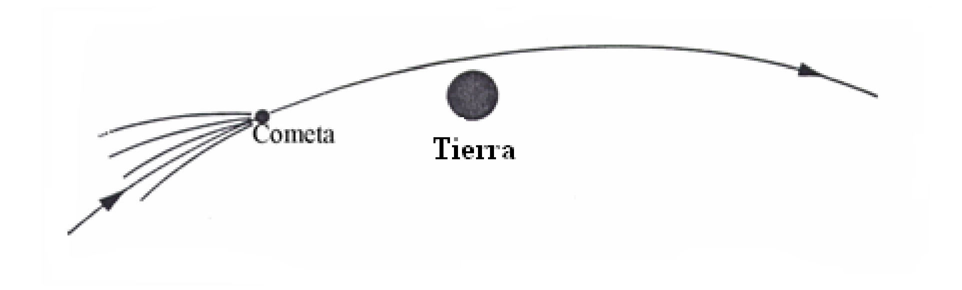


Figura 6–4 Colisión no frontal bajo la acción de una fuerza atractiva

Analizar las colisiones aplicando la forma tradicional de la segunda ley de Newton resultaría sumamente complicado, ya que se tendría que conocer la ley de la fuerza actuante, para luego aplicar instantáneamente la segunda ley de Newton y encontrar las trayectorias.

Partiendo de la tercera ley de Newton, se va a desarrollar una nueva forma de análisis, no solo útil, sino que ha dado excelentes resultados en la evolución de la teoría Física.

6.2 CONSERVACIÓN DE LA CML

Se va a aplicar la segunda ley de Newton a dos partículas A y B considerando que sobre ellas actúa solamente la fuerza que ejerce cada una sobre la otra, como se indica en la figura Fig. 6–5:

$$\mathbf{F}_{B/A} = m_A\mathbf{a}_A = m_A\frac{\Delta\mathbf{v}_A}{\Delta t}, \qquad (6\text{–}2)$$

$$\mathbf{F}_{A/B} = m_B\mathbf{a}_B = m_B\frac{\Delta\mathbf{v}_B}{\Delta t}, \qquad (6\text{–}3)$$

$\mathbf{F}_{B/A}$ A B $\mathbf{F}_{A/B}$

Figura 6–5

De acuerdo con la tercera ley de Newton

$$\mathbf{F}_{B/A} = -\mathbf{F}_{A/B}, \qquad (6\text{–}4)$$

y reemplazando las ecuaciones Ecs. (6–2) y (6–3) en la Ec. (6–4) se tiene que:

$$m_A\frac{\Delta \mathrm{v}_A}{\Delta t} = -\, m_B\frac{\Delta \mathrm{v}_B}{\Delta t}. \qquad (6\text{–}5)$$

En la Ec. (6–5) los Δt son los mismos, por tanto se puede escribir

$$m_A\Delta \mathrm{v}_A = -\, m_B\Delta \mathrm{v}_B,$$

y reemplazando los cambios de velocidad en función de las velocidades inicial y final se tiene que

$$m_A(\mathrm{v}_{A_f} - \mathrm{v}_{A_0}) = -\, m_B(\mathrm{v}_{B_f} - \mathrm{v}_{B_0}).$$

Destruyendo los paréntesis y pasando los términos que tienen las velocidades finales a la izquierda y las velocidades iniciales a la derecha, se tiene

$$m_A\mathbf{v}_{A_f} + m_B\mathbf{v}_{B_f} = m_A\mathbf{v}_{A_0} + m_B\mathbf{v}_{B_0} \text{ .} \qquad (6\text{–}6)$$

Pero, el producto de la masa por la velocidad es la *cantidad de movimiento lineal* **p**, por lo tanto la Ec. (6–6) queda:

$$\mathbf{p}_{Af} + \mathbf{p}_{Bf} = \mathbf{p}_{A0} + \mathbf{p}_{B0} \qquad (6\text{–}7)$$

que es más que el principio de conservación de la cantidad de movimiento lineal, por lo que podemos escribir que

$$\mathbf{p}_{\textbf{total final}} = \mathbf{p}_{\textbf{total inicial}} \qquad (6\text{–}8)$$

Esto se podría aplicar a muchos intervalos de tiempo como sean necesarios hasta completar todo el proceso que dura una colisión. Por lo tanto, se tiene nuevamente una ecuación de balance en la que una cantidad física la CML, se conserva durante el proceso.

Es importante que no se olvide que la CML es una cantidad vectorial y que por ello, para operarla, se debe usar las reglas del algebra vectorial, aún en el caso de que las partículas se muevan por una trayectoria recta.

Para el desarrollo anterior asumimos que el sistema era aislado o sea que durante la colisión no actuaban fuerzas externas. En caso de existir fuerzas externas, y la fuerza neta es diferente de cero, entonces la CML del sistema no se conserva porque parte de ella puede transferirse al agente externo.

En el desarrollo anterior tampoco le consideramos al principio de conservación de la energía, lo que significa que el principio de conservación de la CML es independiente de la conservación de la energía.

De lo que se vio antes, en una **colisión elástica**, no se producen deformaciones permanentes de las partículas, por lo que no hay una conversión permanente de energía cinética en potencial, lo que quiere decir que **se conserva la energía cinética** del sistema.

Colisión elástica frontal

Ejemplo 6–1. Dos partículas de masas m_A y m_B que se mueven inicialmente con velocidades $\mathbf{v}_{A_0}$ y $\mathbf{v}_{B_0}$ experimentan una colisión central elástica. Determine las expresiones generales de cada una de las velocidades que tienen las partículas después de la colisión.

Como en una colisión perfectamente elástica se conserva la energía cinética del sistema, podemos escribir

$$\tfrac{1}{2}m_A v_{A_f}^2 + \tfrac{1}{2}m_B v_{B_f}^2 = \tfrac{1}{2}m_A v_{A_0}^2 + \tfrac{1}{2}m_B v_{B_0}^2 \text{,} \qquad (6\text{–}9)$$

la cual relaciona a las dos incógnitas $\mathbf{v}_{A_f}$ y $\mathbf{v}_{B_f}$ y, con la Ec. (6–6), se tiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que permiten resolver el problema.

Simplificando el factor $\frac{1}{2}$ en cada término de la Ec. (6–9) queda

$$m_A v_{A_f}^2 + m_B v_{B_f}^2 = m_A v_{A_0}^2 + m_B v_{B_0}^2 \,, \qquad (6\text{–}9a)$$

y aplicando el principio de conservación de la CML a este caso da

$$m_A v_{A_f} + m_B v_{B_f} = m_A v_{A_0} + m_B\, v_{B_0} \,. \qquad (6\text{–}6a)$$

Pasando todos los términos que tienen m_A a la izquierda y todos los que tienen m_B a la derecha, en la Ec. (6–9a) se tiene

$$m_A(v_{A_f}^2 - v_{A_0}^2) = m_B(v_{B_0}^2 - v_{B_f}^2)\,.$$

Factorando las diferencias de cuadrados da

$$m_A(v_{A_f} + v_{A_0})(v_{A_f} - v_{A_0}) = m_B(v_{B_0} + v_{B_f})(v_{B_0} - v_{B_f})\,,$$

Haciendo lo mismo en la Ec. (6–6a) se tiene

$$m_A(v_{A_f} - v_{A_0}) = m_B(v_{B_0} - v_{B_f})\,.$$

Dividiendo las dos últimas ecuaciones da

$$v_{A_f} + v_{A_0} = v_{B_f} + v_{B_0}\,,$$

Y despejando la velocidad final de B queda

$$v_{B_f} = v_{A_f} + v_{A_0} - v_{B_0}\,.$$

Sustituyendo esta expresión por v_{B_f} en la Ec. (6–6a) da finalmente

$$v_{A_f} = \frac{2m_B v_{B_0} + (m_A - m_B)v_{A_0}}{m_A + m_B}, \text{ y} \qquad (6\text{–}10a)$$

$$v_{B_f} = \frac{2m_A v_{A_0} - (m_A - m_B)v_{B_0}}{m_A + m_B}. \qquad (6\text{–}10b)$$

Se deja al lector para que analice los resultados de estas ecuaciones para los siguientes casos de choques elásticos frontales: (1) para partículas de masas iguales pero la una inicialmente en reposo, (2) para partículas de masas iguales con velocidades iguales y opuestas, y (3) para partículas de masas iguales con velocidades diferentes y opuestas.

Colisión completamente inelástica

Una colisión en la que los cuerpos, después de ella, permanecen moviéndose juntos se denomina colisión completamente inelástica; en este caso, es evidente que

$$\mathbf{v}_{A_f} = \mathbf{v}_{B_f}. \qquad (6\text{–}11)$$

Ejemplo 6–2. Suponga que se tienen dos átomos de oxígeno. El átomo *A* viaja con una velocidad v_{Ao} y choca con el otro átomo *B*, inicialmente en reposo, como se indica en la Fig. 6–6. Durante la colisión se combinan para formar una molécula de oxígeno. Determine la velocidad de la molécula.

Como $m_A = m_B = m$, al aplicar el principio de conservación de la cantidad de movimiento lineal a este caso da

$$(2m)\mathbf{v}_f = m\mathbf{v}_{A_0} + 0.$$

Figura 6–6

Por lo tanto,

$$\mathbf{v}_f = \tfrac{1}{2}\mathbf{v}_{A_0},$$

que es la velocidad que se busca. La molécula tiene entonces la mitad de la velocidad del átomo colisionante.

La energía cinética inicial del sistema es

$$\text{Ec}_0 = \tfrac{1}{2} m v_{A_0}{}^2 ,$$

mientras que la energía cinética final del mismo es

$$\text{Ec}_f = \tfrac{1}{2}(2m) v_{B_f}^2 = m(\tfrac{1}{2} v_{A_0})^2 = \tfrac{1}{4} m v_{A_0}^2 = \tfrac{1}{2}\text{Ec}_0 .$$

Por lo tanto, la mitad de la Ec inicial se pierde. En este caso, es liberada por un fotón de luz. El fotón también lleva cantidad de movimiento lineal pero es significantemente pequeña comparada con las otras cantidades de movimiento involucradas. Si A y B fueran dos carros que quedan enganchados durante una colisión, la Ec perdida se transforma en energía térmica (energía de las moléculas).

Se deja al lector que analice lo que ocurriría si en este ejemplo A y B estuvieran inicialmente acercándose con la misma velocidad.

En los ejemplos que hemos analizado hasta aquí hemos asumido que durante la colisión la masa del sistema permanece constante. En realidad, hemos asumido otro principio de conservación, el principio de conservación de la *masa*, que, aunque en nuestra experiencia diaria este principio parezca evidente, estrictamente hablando no es así, ya que depende de las condiciones en las que se esté analizando el fenómeno, esto es, si se está trabajando con el principio de relatividad en su forma clásica o galileana o en su forma relativística o lorentziana.

A continuación se va a hacer un ejemplo de una colisión que, a diferencia de las que hemos considerado hasta aquí, se produce en dos dimensiones.

Ejemplo 6–3. Suponga que un neutrón, que estaba viajando a la derecha a 1000 m/s, choca con un protón que se estaba moviendo hacia arriba a 500 m/s, como se indica en la Fig. 6–7*a*. Durante el impacto se combinan para formar un deuterón (núcleo de hidrógeno pesado). Determine la velocidad del deuterón. Asumir que la masa se conserva.

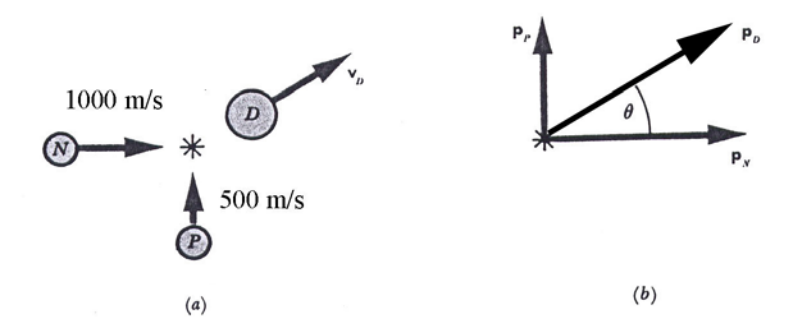


Figura 6-7 Colisión en dos dimensiones

La fig. 6–7*b* muestra la suma vectorial de las cantidades de movimiento lineal del neutrón $\mathbf{p}_N$ y del protón $\mathbf{p}_P$ antes de la colisión. Como las masas del neutrón y del protón son aproximadamente iguales, las llamaremos m a cada una, por lo que el módulo de la cantidad de movimiento lineal total antes de la colisión es

$$\sqrt{(1000m)^2 + (500m)^2} = 1120m$$

y el ángulo es

$$\theta = \arctan \frac{500m}{1000m} = \arctan 0.500 = 27°.$$

Por el principio de conservación de la CML, el módulo de la cantidad de movimiento lineal del deuterón es igual a 1120*m*, y como la masa del deuterón es 2*m*, entonces la velocidad del deuterón es

$$v_D = \frac{p_D}{2m} = 560\,\mathrm{m/s}$$

formando $27°$ con la dirección inicial del neutrón.

Conservación de la CML de un sistema de muchas partículas

El principio de conservación de la cantidad de movimiento lineal es más general de lo que se podría suponer al ser desarrollado solo para la colisión de 2 partículas. La base de su desarrollo es la Tercera Ley de Newton, que es de una validez general, por lo que podemos afirmar que la CML se conservará siempre y cuando la fuerza neta externa que actúa sobre un sistema de partículas es cero. Una colisión solo es un caso particular.

La segunda ley de Newton para un sistema de *n* partículas es

$$\sum \mathrm{F}_{\mathrm{ext}} = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathrm{a}_{\mathrm{i}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \mathrm{v}_{\mathrm{i}_f} - m_i \mathrm{v}_{\mathrm{i}_0}}{\Delta t} \quad \text{ó} \qquad (6\text{–}12)$$

$$\sum \mathbf{F}_{\mathbf{ext}} \Delta t = \text{Impulso neto externo} = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathrm{v}_{if} - \sum_{i=1}^{n} m_i \mathrm{v}_{io}$$

Si es que la fuerza neta externa es cero, no existe impulso neto, por lo tanto:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \mathrm{v}_{if} = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathrm{v}_{io} \qquad (6\text{–}13)$$

que es precisamente el principio de conservación de la cantidad de movimiento lineal.

Hasta aquí hemos considerado colisiones entre partículas, pero estos resultados también son aplicables a colisiones entre cuerpos extensos que se mueven a lo largo de la recta que une sus centros de masas antes y después de la colisión. A estas colisiones se las conoce como colisiones frontales o centrales. Ahora vamos a considerar una colisión no central.

Ejemplo 6–4. Dos bolas de billar de igual masa *m* e igual radio *r* (Fig. 6–8), experimentan una colisión elástica. La bola *B* está inicialmente en reposo. El centro de *A* se mueve a lo largo de una recta que se encuentra a una distancia ρ del centro de la otra, siendo $\rho < 2\,r$ para que se pueda producir la colisión. Determine las velocidades después de la colisión.

Este problema se puede resolver fácilmente considerando las dos bolas en el momento de la colisión. La velocidad inicial $\mathbf{v}_{A_0}$ tiene dos componentes: una a lo largo de la recta que une los centros (Fig. 6–8*a*) igual a $v_{A_0}\cos\psi$ y otra perpendicular a dicha recta e igual a $v_{A_0}\,\text{sen}\,\psi$.

A lo largo de la recta que une los centros se produce una colisión central elástica de 2 cuerpos de igual masa, y ya vimos que, en este caso, hay un intercambio de velocidades, por lo que *B* se moverá a lo largo de la recta de los centros con una velocidad $v_{A_0}\cos\psi$. La componente de la velocidad de *A* en está dirección será cero y la otra componente permanecerá constante, ya que en esa dirección no se produce colisión, por lo tanto, las 2 bolas se moverán formando un *ángulo recto*, *B* en la dirección de la recta de los centros al momento del impacto y *A* perpendicular a esta dirección (un resultado bien conocido por los aficionados a jugar billar).

Las magnitudes de las velocidades finales se pueden expresar más fácilmente en función de ρ, que se le conoce como *parámetro de impacto* y representa la distancia perpendicular entre el centro de la bola golpeada *B* y la dirección del movimiento de la bola *A*. De la Fig. 6–8*b*, se tiene que:

$$\text{sen}\ \psi = \frac{\rho}{2r},$$

$$\cos\psi = \sqrt{\frac{4r^2-\rho^2}{4r^2}} = \sqrt{1-\left(\frac{\rho}{2r}\right)^2},$$

Por lo que la magnitud de la velocidad final de la bola *A* es:

$$v_{A_f} = \frac{v_{A_0}\rho}{2r}, \qquad \rho < 2r, \qquad (6\text{–}14)$$

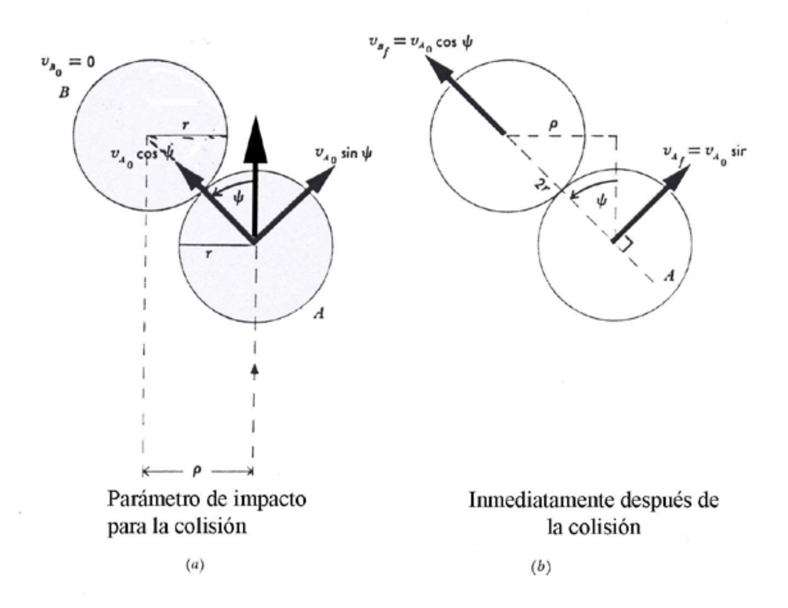


Figura 6–8 Colisión de cuerpos extensos

y la magnitud de la velocidad final de *B* es:

$$v_{B_f} = v_{A_0}\sqrt{1-\left(\frac{\rho}{2r}\right)^2}, \qquad \rho < 2r. \qquad (6\text{–}15)$$

Si $\rho = 0$ se tiene el caso que ya analizamos de colisión central, en la que la $v_{A_f} = 0$ y la $v_{B_f} = v_{A_0}$.

Si $\rho = 2\,r$, no hay colisión, por lo que, $v_{A_f} = v_{A_0}$ y $v_{B_f} = 0$.

Una diferencia importante entre una colisión elástica central y otra no central es que: en la primera la energía cinética total es transferida a la partícula inicialmente en reposo y en la segunda solo una parte que está dada por:

$$\Delta\text{Ec} = \tfrac{1}{2}mv_{A_0}^2 - \tfrac{1}{2}mv_{A_f}^2, \text{ ó}$$

$$\Delta\text{Ec} = \tfrac{1}{2}mv_{A_0}\left[1-\left(\frac{\rho}{2r}\right)^2\right]. \qquad (6\text{–}16)$$

Lo que significa que, dependiendo del parámetro de impacto ρ, la energía cinética transferida puede variar desde cero hasta un valor máximo de $\tfrac{1}{2}m\text{v}_{\text{A0}}^2$

Explosiones

Aunque las desintegraciones o explosiones no se parecen a las colisiones analizadas, el principio de conservación de la cantidad de movimiento lineal juega un papel importante en ellas, ya que implican la fragmentación de un sistema aislado, con la transformación de la energía potencial interna en energía cinética de los fragmentos.

Ejemplo 6–5. Una bala de 0.01 kg es disparada por una pistola de 3 kg, saliendo del cañón con una rapidez de 300 m/s. Determine la rapidez de la pistola después del disparo.

Como inicialmente la bala y el arma están en reposo, la cantidad de movimiento lineal del sistema es cero. Por el principio de conservación de la CML, la cantidad de movimiento lineal final del sistema también debe ser cero. Como la bala es disparada hacia la derecha, ésta tiene una cantidad de movimiento lineal de $m\mathbf{v}_f$ dirigida hacia la derecha, para que la cantidad de movimiento lineal total final del sistema sea cero, la pistola debe tener una cantidad de movimiento lineal de $M\mathbf{V}_f$ hacia la izquierda, donde $\mathbf{V}_f$ es la velocidad del retroceso del arma, por lo que:

$$m\,\mathbf{v}_f = -\mathrm{M}\,\mathbf{V}_f \quad \text{ó}$$

$$\mathbf{V}_f = -\frac{m}{M}\,\mathbf{v}_f\,. \qquad (6\text{–}17)$$

como m = 0.01kg, v_f = 300 m/s y M = 3 kg, el arma retrocede con una rapidez de

$$\frac{0.010}{3}\times 300 = 1\ \text{m/s.}$$

Aunque la Ec. (6–17) ha sido deducida para una pistola disparando una bala, es evidente que representa un resultado más general, incluyendo todos los casos en los cuales un objeto en reposo expulsa parte de su masa. Por ejemplo:

- Cuando el núcleo de uranio radioactivo U^{238} (masa = 238 uma) se desintegra mediante la emisión de una partícula alfa (masa = 4 uma), el nuevo núcleo (torio) retrocede con una velocidad de 4/234 de la velocidad de la partícula alfa.
- La formación de un par electrón-positrón cuando un fotón muy energético (rayo gamma) es detenido con plomo. Como el positrón es la antipartícula positiva del electrón tienen masas iguales, por lo que deben salir con igual rapidez. Esto se ha comprobado en forma experimental.
- En el movimiento de un barco, sus propulsores empujan el agua hacia atrás dándole cantidad de movimiento lineal, el barco avanza hacia delante con una cantidad de movimiento lineal igual pero opuesta.
- Cuando despega un cohete arroja rápidamente hacia abajo los gases calientes que resultan de la combustión, por lo que estos gases adquieren una cantidad de movimiento lineal hacia abajo; como consecuencia de esto, el cohete adquiere una igual cantidad de movimiento lineal hacia arriba.
- Cuando una persona camina sobre la superficie terrestre adquiere una cantidad de movimiento lineal, por lo tanto la Tierra adquiere la misma cantidad de movimiento lineal

pero en dirección contraria; pero, como la Tierra tiene una masa sumamente grande comparada con la persona su rapidez de retroceso va a ser insignificante.

6.3 CONSERVACIÓN DE LA MASA

En la Sec. (6–2) se supuso que en una colisión las masas de las partículas emergentes equivalen a las masas de las partículas colisionantes. Esto en realidad es otro principio de conservación, que se analizará para ver en qué condiciones se cumple.

En la relatividad galileana se establece que las leyes del movimiento de Newton y por lo tanto la conservación de la cantidad de movimiento lineal, se cumple en todos los sistemas de coordenadas que se mueven unos respecto a otros con velocidad constante, es decir, que las leyes de Newton se cumplen en todos los *sistemas de referencia inerciales*. Cuando ocurre esto, se dice que esa ley o ese principio es una invariante galileana. Vamos a demostrar a continuación que el principio de conservación de la masa es válido si el principio de conservación de la cantidad de movimiento lineal es una invariante galileana.

Considere la colisión de dos partículas A y B, de masas m_A y m_B que viajan en la dirección del eje x con velocidades $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ medidas por un observador en el sistema S (Fig. 6–9*a*). Vamos a suponer que como resultado de la colisión se obtienen dos partículas C y D de masas m_C y m_D también moviéndose en la dirección del eje x con velocidades v_C y v_D medidas en el sistema S (Fig. 6–9*b*). En general A y B son diferentes de C y D, en masa y en otras características. Si aplicamos el principio de conservación de la cantidad de movimiento lineal en el sistema S se tiene

$$m_A\mathbf{v}_A + m_B\mathbf{v}_B = m_C\mathbf{v}_C + m_D\mathbf{v}_D. \qquad (6\text{–}18)$$

El observador en el sistema S', que se mueve con una velocidad constante $\mathbf{u}$ con respecto a S, va a medir diferentes velocidades iniciales y finales, las mismas que de acuerdo con la ecuación de la velocidad relativa son las siguientes:

$$v'_A = v_A - u\ , \qquad v'_B = v_B - u,$$

$$v'_C = v_C - u, \qquad v'_D = v_D - u.$$

Por lo tanto, para el observador S', el principio de conservación de la cantidad de movimiento lineal para la colisión es

$$m_A(\mathbf{v}_A - \mathbf{u}) + m_B(\mathbf{v}_B - \mathbf{u}) = m_C(\mathbf{v}_C - \mathbf{u}) + m_D(\mathbf{v}_D - \mathbf{u}) \text{ ó}$$

$$m_A\mathbf{v}_A - m_A\mathbf{u} + m_B\mathbf{v}_B - m_B\mathbf{u} = m_C\mathbf{v}_C - m_C\mathbf{u} + m_D\mathbf{v}_D - m_D\mathbf{u}\,. \qquad (6\text{–}19)$$

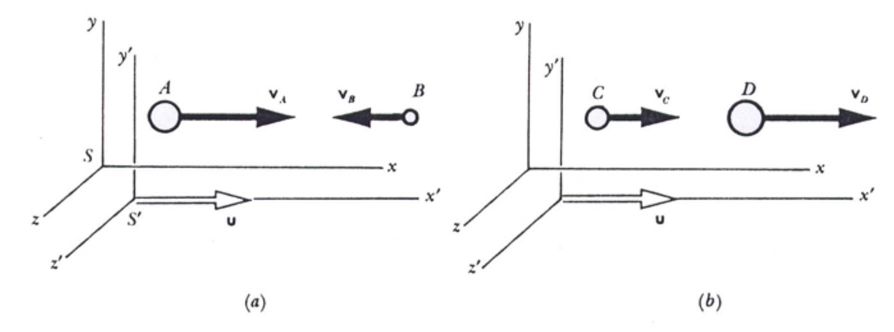


Figura 6–9 Colisión observada en dos sistemas inerciales con velocidad relativa **u.** Las velocidades están dadas en el sistema *S*.

Combinando las Ecs. (6–18) y (6–19), se tiene:

$$\mathbf{u}(m_A + m_B) = \mathbf{u}(m_C + m_D), \text{ por lo tanto} \qquad (6\text{–}20)$$

$$(m_A + m_B) = (m_C + m_D)$$

Que es precisamente el principio de conservación de la masa: la masa total del sistema es la misma antes y después de la colisión. Si en lugar de aplicar la relatividad de Galileo aplicáramos la de Einstein, la situación sería diferente.

6.4 SISTEMA CENTRO DE MASA (CM)

Analizar los resultados de una colisión en sistemas de coordenadas que no sean el sistema de laboratorio en el que la colisión ocurre, es muchas veces una gran ventaja, porque ciertas relaciones y simetrías que no se visualizan en algunos sistemas de coordenadas pueden ser fácilmente observables en otros. Es muy valioso el sistema de coordenadas en el cual *el centro de masa de las partículas que colisionan (chocan) se encuentra en reposo*, a este sistema se le denomina *del centro de masa o sistema de referencia del centro de masa* (se denominará sistema *CM*).

Para dos partículas *A* y *B* con masas m_A y m_B, cuyos vectores posición son $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$ respectivamente, el centro de masa (*CM*) es localizado por:

$$\mathrm{r}_{\mathrm{CM}} = \frac{m_A \mathrm{r}_A + m_B \mathrm{r}_B}{m_A + m_B},$$

y la velocidad del centro de masa, $\mathbf{v}_{cm}$, está dada por

$$\mathbf{v}_{cm} = \frac{m_A \mathbf{v}_{A_0} + m_B \mathbf{v}_{B_0}}{m_A + m_B}, \qquad (6\text{–}21)$$

donde $\mathbf{v}_{A_0}$ y $\mathbf{v}_{B_0}$ son las velocidades de las partículas antes del choque. Al dividir la Ec. (6–21) para m_B, se tiene

$$\mathbf{v}_{cm} = \frac{(m_A / m_B)\mathbf{v}_{A_0} + \mathbf{v}_{B_0}}{m_A / m_B + 1}. \qquad (6–21a)$$

En primer lugar considere que la masa de *B* es mucho mayor que la masa de *A* y que inicialmente la partícula *B* se encuentra en reposo (Fig. 6–10); en este caso el *CM* está en *B*, y como *A* se desplaza hacia *B*, el *CM* permanece en reposo en la partícula *B*. Matemáticamente si $m_B = \infty$, la $\mathbf{v}_{cm} = \mathbf{v}_{B_0}$ y si $\mathbf{v}_{B_0} = 0$, entonces $\mathbf{v}_{cm} = 0$. En éstas condiciones el sistema *CM* es igual al sistema del laboratorio. Esta situación es aproximada para una partícula que se acerca a otra, mucho más pesada (a una pared) y que se encuentra en reposo.



Figura 6–10 Cuando un objeto es de masa infinita, el *CM* está fijo en este objeto

Si se consideran las partículas, *A* y *B*, de igual masa de tal manera que *A* se traslada con $\mathbf{v}_{A_0}$ y la partícula *B* se encuentra en reposo (Fig. 6–11*a*). En este caso el *CM* de este sistema está en la mitad de la línea que las une y su velocidad de acuerdo a la Ec. (6-21) es:

$$\mathbf{v}_{cm} = \tfrac{1}{2}\mathbf{v}_{A_0}. \qquad (6–22)$$

Observando el choque entre *A* y *B*, como si estuviera viajando con el *CM*, las velocidades de las partículas son $\frac{1}{2}\mathbf{v}_{A_0}$ y $-\frac{1}{2}\mathbf{v}_{A_0}$ respectivamente. Entonces la cantidad de movimiento lineal total de las partículas en el sistema *CM* es $\frac{1}{2}m_A\mathbf{v}_{A0}$ y $-\frac{1}{2}m_B v_{A_0}$ (Fig.6–11*b*). (Recuerde que en este caso $m_A = m_B$).

Examine algunas de las ventajas de analizar las colisiones de partículas en el sistema *CM*, considerando una *colisión elástica frontal* de dos partículas de igual masa; sin conocer el principio de conservación de la cantidad de movimiento lineal, se puede deducir esta ley únicamente analizando la simetría del problema.

En el sistema *CM* se tendrán dos partículas idénticas aproximándose con igual rapidez y luego del choque, las partículas también se alejarán con la misma rapidez. Se concluye que las partículas intercambian su cantidad de movimiento lineal (Fig. 6–11*b*), lo que implica que la cantidad de movimiento lineal total de las partículas se conserva en la colisión. Para regresar nuevamente al sistema de laboratorio se debe sumar la velocidad de cada partícula en el sistema *CM*, la velocidad del *CM* $\mathbf{v}_{cm} = \frac{1}{2}\mathbf{v}_{A_0}$ (Fig. 6–11*c*) y obtener que la velocidad final de *A* es igual a cero, y que la velocidad final de *B* es igual a la velocidad inicial de *A*, $\mathbf{v}_{A_0}$. Los mismos resultados se obtienen utilizando la conservación de la cantidad de movimiento lineal para una colisión elástica frontal.

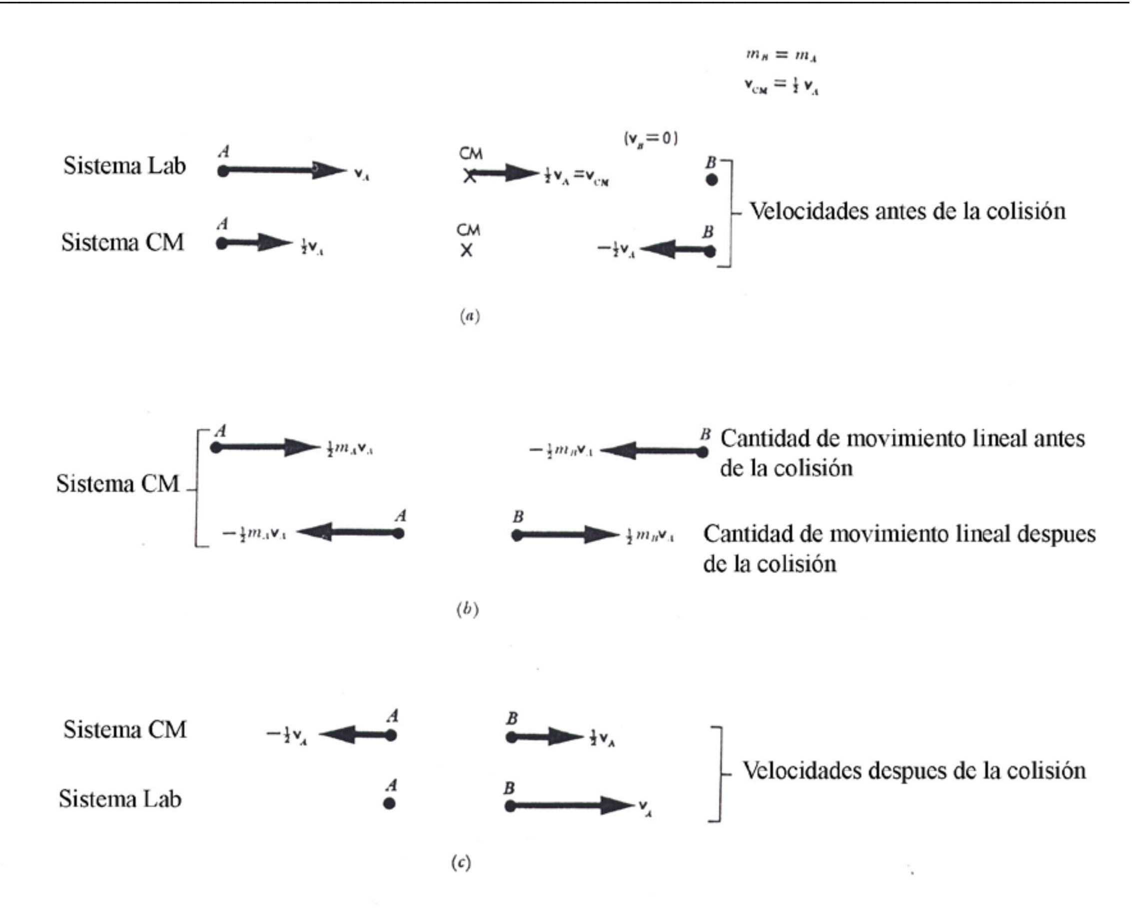


Figura 6-11 Uso del sistema *CM*

Cuando se considera una colisión de cuerpos con masas y velocidades diferentes resulta conveniente analizar el choque desde el sistema *CM*; sin embargo, es de notar que el procedimiento que se debe seguir es idéntico al del ejemplo anterior.

El procedimiento matemático para una colisión elástica frontal de dos partículas de masas m_A y m_B con velocidades iniciales $\mathbf{v}_{A_0}$ y $\mathbf{v}_{B_0}$ antes del choque respectivamente es: (1) *restar* la velocidad $\mathbf{v}_{cm}$ de la velocidad de cada cuerpo medida en el sistema de laboratorio; (2) analizar la colisión en el sistema *CM*, donde las simetrías son útiles y (3) transformar nuevamente al sistema de laboratorio sumando $\mathbf{v}_{cm}$ a cada una de las velocidades de los cuerpos, encontradas en el sistema *CM*.

En este ejemplo se utilizan mayúsculas para representar las velocidades de las partículas determinadas en el sistema *CM*, de la siguiente manera:

$$\mathbf{V}_{A_0} = \mathbf{v}_{A_0} - \mathbf{v}_{CM} = \mathbf{v}_{A_0} - \frac{m_A \mathbf{v}_{A_0} + m_B \mathbf{v}_{B_0}}{m_A + m_B},$$

que se simplifica a

$$\mathbf{V}_{A_0} = \frac{m_B}{m_A + m_B}(\mathbf{v}_{A_0} - \mathbf{v}_{B_0}). \qquad (6\text{–}23)$$

La cantidad de movimiento lineal inicial de *A* en el sistema *CM* es entonces

$$m_A \mathbf{V}_{A_0} = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}(\mathbf{v}_{A_0} - \mathbf{v}_{B_0}) = \mu(\mathbf{v}_{A_0} - \mathbf{v}_{B_0}), \qquad (6\text{–}24a)$$

en donde la cantidad μ, llamada *masa reducida* de un par de cuerpos, está definida por:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \qquad \text{o} \qquad \mu = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}. \qquad (6\text{–}25)$$

De igual forma en el sistema CM, la partícula B tiene una cantidad de movimiento lineal inicial de

$$m_B \mathbf{V}_{B_0} = \mu(\mathbf{v}_{B_0} - \mathbf{v}_{A_0}). \qquad (6\text{–}24b)$$

Entonces se encuentra una simetría cuando se observa la colisión desde el sistema *CM,* como se indica en las Ecs. (6–24*a*) y (6–24*b*). *En el sistema CM la colisión elástica frontal es equivalente al de dos partículas de masa* μ *aproximándose cada una con igual rapidez y dirección contraria*.

Nuevamente, la simetría observada en el sistema *CM* establece que en la colisión, las dos partículas intercambian su cantidad de movimiento lineal, por lo que la cantidad de movimiento lineal de A luego de la colisión es:

$$\mu(\mathbf{v}_{B_0} - \mathbf{v}_{A_0}) = m_A \mathbf{V}_{A_f}.$$

Aquí

$$\mathbf{V}_{A_f} = \frac{\mu}{m_A}(\mathbf{v}_{B_0} - \mathbf{v}_{A_0}) = \frac{m_B}{m_A + m_B}(\mathbf{v}_{B_0} - \mathbf{v}_{A_0}). \qquad (6\text{–}26a)$$

Igualmente, se encuentra

$$\mathbf{V}_{B_f} = \frac{\mu}{m_B}(\mathbf{v}_{A_0} - \mathbf{v}_{B_0}) = \frac{m_A}{m_A + m_B}(\mathbf{v}_{A_0} - \mathbf{v}_{B_0}). \qquad (6\text{–}26b)$$

Finalmente, regresando al sistema de laboratorio sumando $\mathbf{v}_{cm}$ a $\mathbf{V}_{A_f}$ y a $\mathbf{V}_{B_f}$, y de acuerdo a la Ec.(6-21):

$$\mathbf{v}_{A_f} = \mathbf{V}_{A_f} + \mathbf{v}_{CM} = \frac{m_B}{m_A + m_B}(\mathbf{v}_{B_0} - \mathbf{v}_{A_0}) + \frac{m_A \mathbf{v}_{A_0} + m_B \mathbf{v}_{B_0}}{m_A + m_B}, \qquad (6\text{-}27)$$

que se simplifica a

$$\mathbf{v}_{A_f} = \frac{2m_B \mathbf{v}_{B_0} + (m_A - m_B)\mathbf{v}_{A_0}}{m_A + m_B}. \qquad (6\text{–}28a)$$

En igual forma se tiene:

$$\mathbf{v}_{B_f} = \frac{2m_A\mathbf{v}_{A_0} - (m_A - m_B)\mathbf{v}_{B_0}}{m_A + m_B}. \qquad (6\text{–}28b)$$

Note que las Ecs. (6–28*a*) y (6–28*b*) son idénticas a las Ecs. (6–14*a*) y (6–14*b*) respectivamente.

Las cantidades de movimiento lineal finales en el sistema de laboratorio son:

$$m_A\mathbf{v}_{A_f} = \frac{2m_Am_B\mathbf{v}_{B_0} + m_A(m_A - m_B)\mathbf{v}_{A_0}}{m_A + m_B} \text{ y} \qquad (6\text{–}29a)$$

$$m_B\mathbf{v}_{B_f} = \frac{2m_Am_B\mathbf{v}_{A_0} - m_B(m_A - m_B)\mathbf{v}_{B_0}}{m_A + m_B}. \qquad (6\text{–}29b)$$

Sumando las Ecs. (6–29*a*) y (6–29*b*), se obtiene la cantidad de movimiento lineal total en el sistema de laboratorio. Finalmente el resultado será:

$$m_A\mathbf{v}_{A_f} + m_B\mathbf{v}_{B_f} = m_A\mathbf{v}_{A_0} + m_B\mathbf{v}_{B_0}. \qquad (6\text{–}30)$$

De esta manera, una colisión de partículas llevadas al sistema CM proporciona una simetría que lleva a la Ec. (6–30), que es la ley de conservación de la cantidad de movimiento lineal para un sistema formado por dos partículas.

Cuando se consideren colisiones no centrales, el procedimiento a seguir será idéntico, donde una vez más la cantidad de movimiento lineal total en el sistema CM es igual a cero antes y después de la colisión.

En las colisiones no centrales, las partículas después del choque salen con velocidades que forman ángulos con las direcciones de las velocidades iniciales, pero siempre se tendrán *cantidades de movimiento lineales iguales en magnitud y dirección contraria en el sistema CM* (Fig.6–12); precisamente es para este tipo de colisiones que la transformación al sistema *CM* tiene un gran valor.

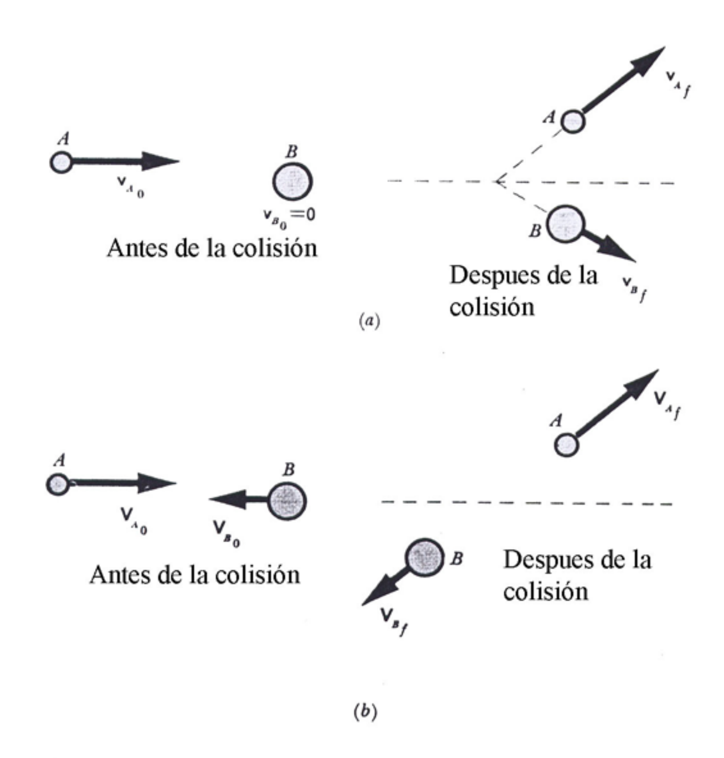


Figura 6–12. Una colisión no central (*a*) en el sistema de laboratorio y (*b*) en el sistema *CM*

6.5 COLISIONES EN EL SISTEMA *CM*

En la sección anterior se analizó que una colisión elástica en el sistema CM muestra una simetría que simplifica los problemas de colisiones. Algo similar se obtiene cuando se analizan colisiones inelásticas en el sistema CM.

En el sistema CM la cantidad de movimiento lineal total de un sistema de partículas siempre es igual a cero. De ésta manera una esfera con cantidad de movimiento lineal $m_A\mathbf{v}_A$ que choca elásticamente con una pared en reposo rebota con una cantidad de movimiento lineal $-\ m_A\mathbf{v}_A$, es decir, con una variación de su cantidad de movimiento lineal de $-2\ m_A\mathbf{v}_A$. En éste caso la pared adquiere un cambio en su cantidad de movimiento lineal de $2\ m_A\mathbf{v}_A$.

Es recomendable analizar las colisiones con una masa m_B muy grande pero no infinita, terminar el problema, y finalmente tomar el límite cuando $m_B \to \infty$.

En una colisión inelástica la energía cinética (*Ec*) total de las partículas que chocan al final de la colisión no es la misma que la *Ec* total de las partículas antes del choque, porque una parte de ésta *Ec* se convierte en energía interna de las partículas que colisionan.

Como se analizó anteriormente, en el sistema *CM*, una colisión entre dos partículas se considera como un choque de dos cuerpos de masa μ (masa reducida) cada uno, viajando el uno hacia el otro con una velocidad $\left|\mathbf{v}_{A_0} - \mathbf{v}_{B_0}\right|$; pero en un choque inelástico no existe intercambio de la cantidad de movimiento lineal de las partículas.

Luego del choque las partículas tienen cantidades de movimiento lineal de igual magnitud y dirección contraria, sin embarco la *Ec* total después de la colisión es menor que la *Ec* total antes de la misma. La Fig. 6–13 muestra una colisión inelástica frontal en la cual el 50% de la *Ec* inicial se convierte en energía interna.

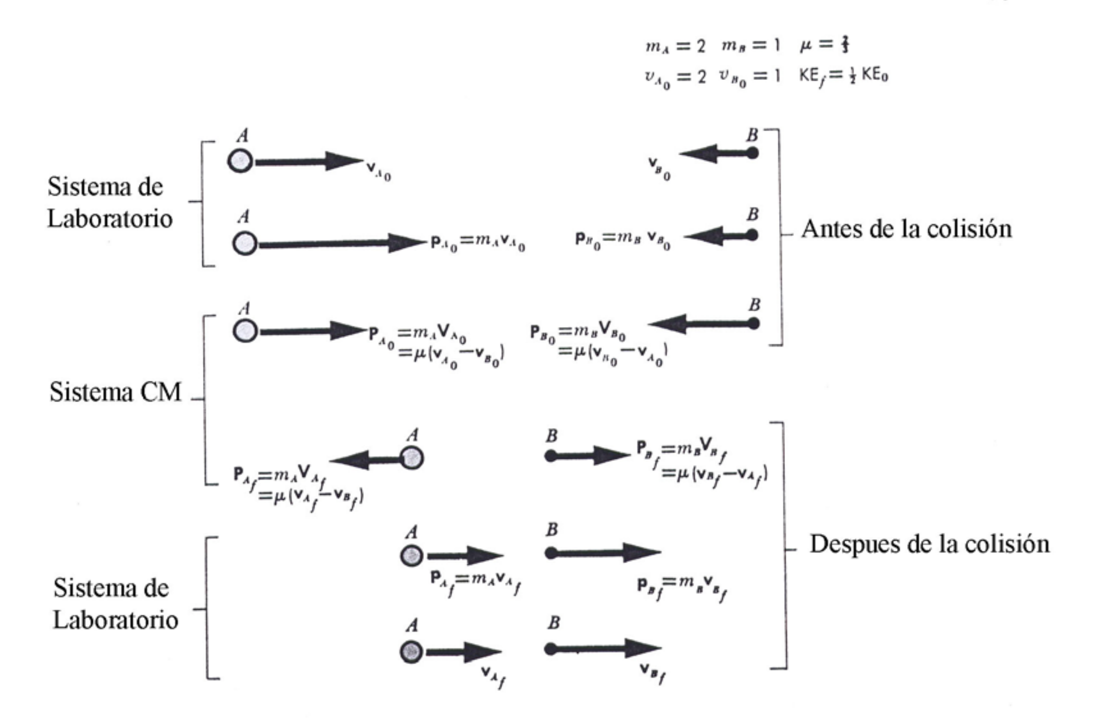


Figura 6–13 Una colisión inelástica con la mitad de la *Ec* original convertida en energía interna

Determinar el porcentaje de *Ec* que se transforma en energía interna del sistema en una colisión inelástica y cumplir con la conservación de la cantidad de movimiento lineal es un problema que con frecuencia se discute en este tipo de colisiones.

Es necesario conocer que no toda la *Ec* inicial del sistema se puede transformar en energía interna; por ejemplo, una partícula de masa m_A que se acerca con una velocidad $\mathbf{v}_{A_0}$ a otra partícula de masa m_B que se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal lisa no puede convertir toda su $Ec = \frac{1}{2} m_A v_{A_0}^{\ 2}$ en energía interna del sistema, porque la cantidad de movimiento lineal inicial es $m_A \mathbf{v}_{A_0}$ y luego del choque sería igual a cero, con lo que no se cumpliría la ley de la conservación de la cantidad de movimiento lineal.

La *Ec* máxima que se convierte en energía interna, se determina fácilmente analizando el problema en el sistema *CM* en el cual se tienen dos partículas que tienen una cantidad de movimiento lineal inicial de magnitud igual a $\mu \left| \mathbf{v}_{A_0} - \mathbf{v}_{B_0} \right|$. *La máxima transformación de Ec en energía interna ocurre cuando la velocidad final de cada partícula en el sistema CM, es igual a cero.*

Para encontrar la velocidad de cada partícula en el sistema de laboratorio debemos sumar la velocidad del *CM* a las velocidades de cada partícula en el sistema *CM*; entonces la velocidad final de cada partícula es igual a

$$v_{cm} = v_{A_f} = v_{B_f} = \frac{m_A v_{A_0}}{m_A + m_B}, \qquad (6–31)$$

de la Ec. (6–26) con $\mathbf{v}_{B_0} = 0$. La *Ec* total final del sistema es la suma de las *Ec* de las partículas:

$$\text{Ec}_f = \tfrac{1}{2} m_A \left(\frac{m_A v_{A_0}}{m_A + m_B} \right)^2 + \tfrac{1}{2} m_B \left(\frac{m_A v_{A_0}}{m_A + m_B} \right)^2 \text{ ó}$$

$$\text{Ec}_f = \frac{1}{2} \frac{m_A{}^2 v_{A_0}{}^2}{m_A + m_B}. \qquad (6–32)$$

La *Ec* inicial del sistema es $\tfrac{1}{2} m_A v_{A_0}{}^2$. Entonces la *Ec* convertida en energía interna del sistema es:

$$\Delta\text{Ec} = \text{Ec}_0 - \text{Ec}_f = \tfrac{1}{2} m_A v_{A_0}{}^2 - \frac{1}{2} \frac{m_A v_{A_0}{}^2}{m_A + m_B}$$

$$= \tfrac{1}{2} m_A v_{A_0}{}^2 \left(1 - \frac{m_A}{m_A + m_B} \right), \text{ ó}$$

$$\Delta\text{Ec} = \tfrac{1}{2} m_A v_{A_0}{}^2 \frac{m_B}{m_A + m_B} = \text{Ec}_0 \frac{m_B}{m_A + m_B}. \qquad (6–33)$$

Si la $m_B = 0$ (es decir el cuerpo *B* no existe, por lo que no hay colisión) entonces la $\Delta Ec = 0$. Pero, cuando m_B es muy grande (próxima al infinito) en el caso de un choque contra una pared fija, la ΔEc se aproxima a $\tfrac{1}{2} m_A v_{A_0}{}^2$; lo que significa que toda la *Ec* inicial se transforma en energía interna.

En cambio, cuando las masas de los cuerpos que colisionan inelásticamente son iguales y el cuerpo *B* está en reposo sobre una superficie horizontal lisa, la máxima conversión de *Ec* en energía interna es igual a $\tfrac{1}{2} Ec_0$.

6.6 CONSERVACIÓN DE LA CMA

Recuerde que cuando anteriormente se aplicó la segunda ley de Newton a un sistema, en rotación se obtuvo la ecuación:

$$\sum \boldsymbol{\tau} = I\, \boldsymbol{\alpha}$$

que relaciona el torque neto $\Sigma\boldsymbol{\tau}$, aplicado al sistema, con la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ del sistema, en rotación. La cantidad *I* es la inercia rotacional (o momento de inercia) del sistema. La similitud de la ecuación anterior de la dinámica rotacional con la ecuación:

$$\sum \boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a},$$

de la dinámica lineal, sugiere una suerte de equivalencia entre las cantidades lineales y las correspondientes cantidades angulares.

En el caso de un sistema aislado de sus alrededores, es decir un sistema en el cual el torque externo neto ejercido sobre él es igual a cero, considere un intervalo de tiempo Δt, en el cual pueden suceder varios procesos en el interior del sistema; pero, en el cual el impulso angular $\Sigma\boldsymbol{\tau}\,\Delta t$, que ejercen los alrededores sobre el sistema, es igual al vector cero. Entonces, por el principio del impulso angular-cantidad de movimiento angular,

$$\Sigma\boldsymbol{\tau}\,\Delta t = \Delta\mathbf{J} = \Delta(I\boldsymbol{\omega}),$$

la cantidad de movimiento angular $\mathbf{J} = I\boldsymbol{\omega}$ no cambia:

$$\Delta\mathbf{J} = \Delta(I\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{0},$$

donde $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular del sistema. La ecuación anterior puede ser escrita de otra forma:

$$\mathbf{J}_f = \mathbf{J}_i \quad \text{o} \quad (I\boldsymbol{\omega})_f = (I\boldsymbol{\omega})_i$$

para un sistema aislado. Las dos ecuaciones anteriores, como ya se indicó en el capítulo 4, son la expresión matemática del principio de conservación de la CMA:

La cantidad total de movimiento angular de un sistema aislado no cambia.

Es posible que partes del sistema aislado cambien su CMA, pero la cantidad total de movimiento angular permanece constante.

Fuerzas centrales y la conservación de la CMA

Recordemos que se llaman fuerzas centrales a aquellas que están dirigidas radialmente de centro a centro de masa de los cuerpos actuantes, hacia adentro o hacia fuera. Tal es el caso de la fuerza gravitacional que es de atracción, y el de la fuerza eléctrica que puede ser de atracción o de repulsión. Por ejemplo, la fuerza gravitacional de la Tierra sobre la Luna está dirigida desde el centro de la Luna hacia el centro de la Tierra, y de ahí su nombre de fuerza central.

El torque neto sobre un sistema $\Sigma\boldsymbol{\tau}$ es cero porque no hay ninguna fuerza externa que actué sobre él o porque hay fuerzas externas que actúan sobre él; pero, la suma de los torques de ellas es cero, o porque hay una fuerza externa que actúe sobre él; pero, cuyo torque sea cero. El tercero es el caso de las fuerzas centrales. Ello se explica porque el torque se calcula con la fórmula

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

y como la fuerza central **F** está en igual dirección que **r** (fuerza central repulsiva) o en dirección contraria (fuerza central atractiva), el producto cruz **r** × **F** es igual a cero.

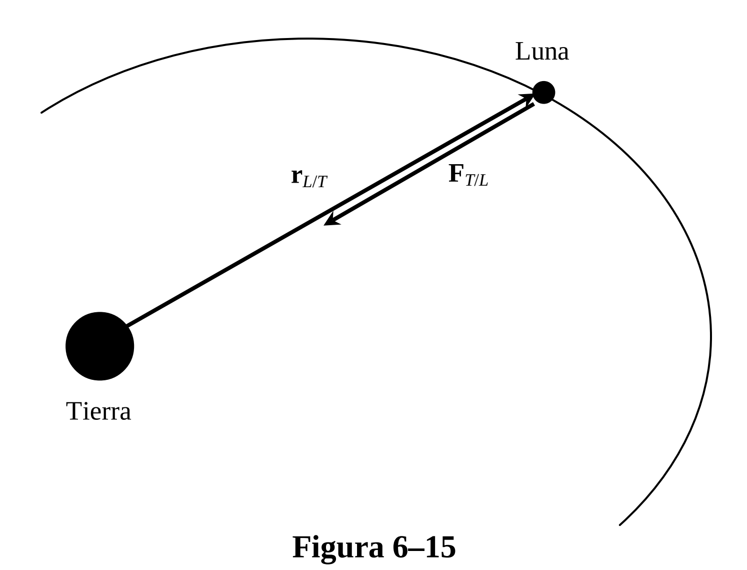


Figura 6–15

Por lo tanto, si sobre una partícula actúa solo una fuerza central la cantidad de movimiento angular de la partícula **J** = *I***ω** se conserva durante el movimiento.

Derivación de la segunda ley de Kepler a partir de la conservación de la cantidad de movimiento angular

Considere el movimiento de un planeta P sujeto exclusivamente a la fuerza gravitacional ejercida por el Sol sobre él. Dicha fuerza es central y, como ya se demostró, la cantidad de movimiento angular del planeta, **J** = *I***ω**, se conserva. Si la cantidad de movimiento angular **J** se conserva, su dirección se conserva. La dirección de la velocidad angular **ω** del planeta, que es igual a la de **J**, también será constante. Por lo tanto el planeta se mueve sobre una órbita que se encuentra en un plano fijo. Según la primera ley de Kepler tal órbita es elíptica. Recuerde que la segunda ley de Kepler afirma que el radio vector de un planeta, con respecto al Sol, barre áreas iguales en intervalos de tiempo también iguales. Para demostrar la segunda ley de Kepler a partir de la conservación de la cantidad de movimiento angular, se tiene:

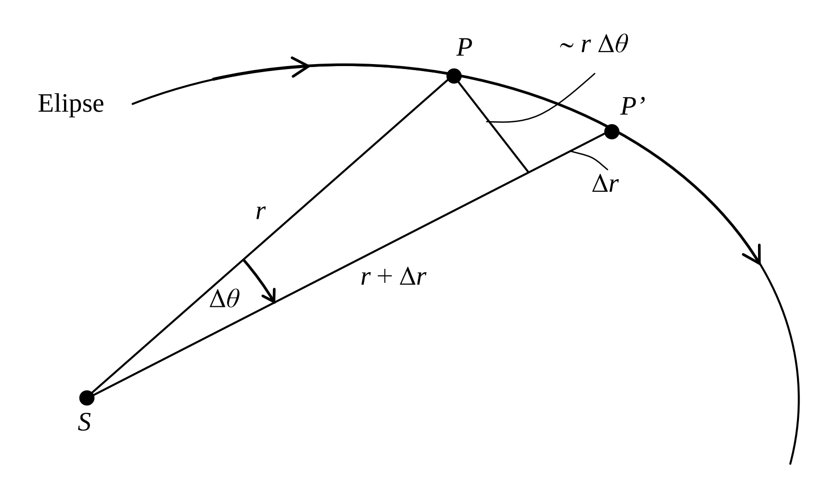


Figura 6–16

El Sol, *S*, se encuentra en uno de los focos de la trayectoria elíptica del planeta el cual a cierto instante se encuentra en el punto *P* y luego de un cierto intervalo Δt se encuentra en el punto *P*'. En el intervalo Δt el radio vector del planeta **r**, con respecto al Sol ha girado un ángulo $\Delta\theta$ y ha aumentado su longitud en Δr, de modo que cuando el planeta se encuentra en el punto *P'* la magnitud del radio vector es $r + \Delta r$. Sea ΔA el área barrida por el radio vector en el intervalo Δt, es decir el área de la región limitada por los radios vectores *SP* y *SP'* y el arco de elipse *PP*'. Para un intervalo Δt pequeño podemos aproximar el área barrida como

$$\Delta A \approx \tfrac{1}{2}(r+\Delta r)(r\,\Delta\theta) = \tfrac{1}{2}\left(r^2\,\Delta\theta + r\,\Delta r\,\Delta\theta\right).$$

Mientras más pequeño sea Δt la aproximación es mejor. Si Δt es pequeño, $\Delta\theta$ es pequeño y también Δr. Si $\Delta\theta$ y Δr son pequeños, su producto $\Delta r\ \Delta\theta$ es aún más pequeño, razón por la cual se puede despreciar y se obtiene:

$$\Delta A \approx \tfrac{1}{2} r^2\,\Delta\theta.$$

Al multiplicar la ecuación anterior por la masa *m* del planeta y dividir para el intervalo Δt:

$$m\frac{\Delta A}{\Delta t} \approx \tfrac{1}{2} m r^2 \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \tfrac{1}{2} I\omega = \tfrac{1}{2} J\ ,$$

de donde:

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} \approx \frac{J}{2m}.$$

Pero *J* es constante porque el vector cantidad de movimiento angular **J** es constante y, como la masa *m* del planeta es constante, se tiene que:

$$\Delta A \approx k\,\Delta t\ ,$$

donde la constante *k* es igual a *J*/2*m*. Si Δt es lo suficientemente pequeño se puede escribir:

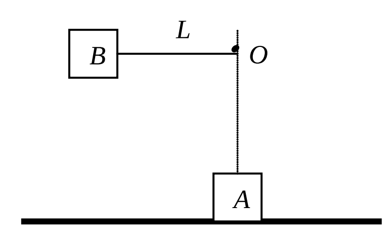
$$\Delta A = k\,\Delta t\ , \qquad (6–34)$$

que es la segunda ley de Kepler, que afirma que el radio vector del planeta barre áreas iguales en intervalos de tiempos también iguales.

PROBLEMAS

6 COLISIONES

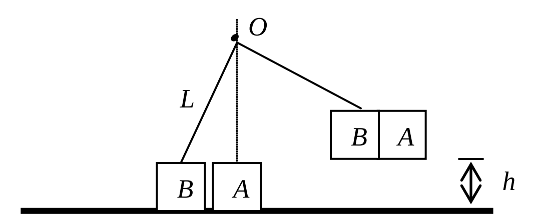
1. Un bloque A se encuentra en una superficie horizontal sin fricción. Otro bloque B de igual masa, unido al extremo de una cuerda de longitud "L", se suelta desde la posición que se indica en la figura. Los dos bloques quedan unidos y continúan moviéndose. Determine:



a) la velocidad del sistema inmediatamente después del choque.

b) ¿hasta donde subirán los bloques?

a) $m_A = m_B = m$



Un poco antes del choque.

$$Epg_B = Ec_B$$

$$m_B\, g\, L = \frac{1}{2} m_B\, v_B^2 \;\Rightarrow\; g\, L = \frac{1}{2} v_B^2 \;\Rightarrow\; v_B^2 = 2\, g\, L$$

Durante el choque

$$m_B\, v_B = (m_A + m_B)\, v \;\Rightarrow\; m\, v_B = 2\, m\, v \;\Rightarrow\; v = \frac{v_B}{2}$$

Después del choque

$$Ec = Epg$$

$$\frac{1}{2}(m_A + m_B)\, v^2 = (m_A + m_B)\, g\, h \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}(2\, m)\, v^2 = (2\, m)\, g\, h \;\Rightarrow\; \frac{1}{2} v^2 = g\, h$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{v_B}{2}\right]^2 = g\, h \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}\left[\frac{v_B{}^2}{4}\right] = g\, h \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}\left[\frac{2\, g\, L}{4}\right] = g\, h \;\Rightarrow\; h = \frac{L}{4}$$

2. Un cuerpo de masa *m* se mueve sobre una superficie horizontalmente lisa, y se produce un choque perfectamente inelástico con otro cuerpo de igual masa y que está en reposo en la superficie. Determine en cuanto se pierde la energía cinética debido al choque.

B	A		B	A

Antes *Después*

$$m_B\, v_B = (m_A + m_B)\, v \;\Rightarrow\; m\, v_B = 2\, m\, v$$

$$v = \frac{v_B}{2}$$

Después del choque

$$\Delta\, Ec = Ec - Ec_0$$

$$\Delta\; Ec = \frac{1}{2}(m_A + m_B)\, v^2 - \frac{1}{2} m_B\, v_0^2 = \frac{1}{2}(2\,m)\, v^2 - \frac{1}{2}(m)\, v_0^2$$

$$\Delta\; Ec = \frac{1}{2}(2\,m)\left[\frac{v_B}{2}\right]^2 - \frac{1}{2}\; m\, v_B^2$$

$$\Delta\; Ec = \frac{1}{2}(2\,m)\left[\frac{v_B^2}{4}\right] - \frac{1}{2}\; m\, v_B^2$$

$$\Delta\; Ec = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\; m\, v_B^2\right] - \frac{1}{2} m\, v_B^2$$

$$\Delta\; Ec = \frac{1}{2} Ec_0 - Ec_0$$

$$\Delta\; Ec = -\frac{1}{2} Ec_0$$

3. Una piedra de 100 g está en reposo sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Un proyectil de 2.5 g se mueve con una velocidad de 400 $\vec{i}$ m/s, choca con la piedra y rebota con una velocidad de 300 $\vec{k}$ m/s. El proyectil y la piedra se mueven finalmente sobre la misma superficie horizontal. Determine la velocidad final de la piedra**.**

$$m_p = 100 \times 10^{-3}\; kg;\;\; v_{0\,p} = 0$$

$$m_{proy} = 2.5 \times 10^{-3}\;\; kg;\; v_{0\,proy} \;\; = 400\,\vec{i}\;\, m/s$$

$$m_p\, \vec{v}_{0\,p} \; + m_{proy}\, \vec{v}_{0\,proy} = m_p\, \vec{v}_p \; + m_{pro}\, \vec{v}_{proy}$$

$$2.5 \times 10^{-3} \times 400\,\vec{i} \; = 100 \times 10^{-3}\, \vec{v}_p \; + 2.5 \times 10^{-3} \times 300\,\vec{k}$$

$$\vec{v}_p = \frac{2.5 \times 10^{-3} \times 400\,\vec{i} - 2.5 \times 10^{-3} \times 300\,\vec{k}}{100 \times 10^{-3}}\;\, m/s$$

$$\vec{v}_p = 10\;\vec{i}\; - 7.5\,\vec{k}\; m/s$$

4. Un cuerpo de 2 kg, que se mueve con una rapidez de 3 m/s, alcanza a otro de 3 kg, que se mueve con una rapidez de 1 m/s. Determine la rapidez de cada uno después del choque sí:

a) no fue elástico.

$m_c = 2\,kg;\ v_{0c} = 3\,m/s$

$m = 3\,kg;\ v_0 = 1\,m/s$

$m_c v_{0c} + m v_0 = m_c v_c + m v \Rightarrow m_c v_{0c} + m v_0 = (m_c + m) v$

$$v = \frac{m_c v_{0c} + m v_0}{m_c + m} = \frac{2\times3+3\times1}{5}\,m/s = \frac{9}{5}\,m/s = 1.8\,m/s$$

b) fue elástico. Considere que los cuerpos se mueven en línea recta.

$m_c v_{0c} + m v_0 = m_c v_c + m v \Rightarrow 2\times3 + 3\times1 = 2v_c + 3v \Rightarrow 1)\quad 9 = 2v_c + 3v$

$Ec_{antres} = Ec_{después}$

$$\frac{1}{2} m_c v_{0c}^2 + \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m_c v_c^2 + \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow m_c v_{0c}^2 + m v_0^2 = m_c v_c^2 + m v^2 \Rightarrow$$

$2\times3^2 + 3\times1^2 = 2v_c^2 + 3v^2 \Rightarrow 2)\quad 21 = 2v_c^2 + 3v^2$

Resolviendo 1) y 2) tenemos: $v_c = \dfrac{9-3v}{2}$, remplazando en 2)

$$21 = 2\left[\frac{9-3v}{2}\right]^2 + 3v^2 \Rightarrow 15v^2 - 54v + 81 = 0 \Rightarrow v_1 = 2.8\,m/s;\ v_2 = 1\,m/s$$

5. Un cuerpo *A*, de 5 kg, choca con otro *B*, de 2.5 kg, que estaba en reposo. La energía cinética del sistema formado por estos dos cuerpos inmediatamente después del choque es de 5 J. Si el choque es completamente inelástico, determine la cantidad de calor que se desprende durante el choque.

$m_A = 5\,kg;\ v_{0A}$

$m_B = 2.5\,kg;\ v_{0B} = 0\,m/s$

$$Ec_{final} = \frac{1}{2}(m_A + m_B)v^2 \Rightarrow 5 = \frac{1}{2}(5+2.5)v^2 \Rightarrow v_{final} = 1.63\text{ m/s}$$

En el choque:

$$m_A v_{0A} + 0 = (m_A + m_B)v \Rightarrow 5\times v_{0A} = (5+2.5)1.63\text{m/s} \Rightarrow v_{0A} = \frac{7.5\times1.63\text{m/s}}{5} \Rightarrow$$

$v_{0A} = 2.45\,\text{m/s}$

$$Q_{desprendido} = \Delta Ec = \left(Ec_f - Ec_o\right) = 5\text{J} - \frac{1}{2} m_A v_{0A}^2 = \frac{1}{2}(5)2.45^2 = \text{-10 J.}$$